А. А. Шестаков, И. А. Малышева, Д. П. Полозков

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

•

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

•

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

•

ПОД РЕДАКЦИЕЙ А. А. ШЕСТАКОВА

Допущено
Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебника для студентов высших технических учебных заведений

МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1987

ББК 22.11
Ш51
УДК 51

Рецензенты: кафедра высшей математики Московского химико-технологического института им. Д. И. Менделеева (зав. кафедрой проф. Лившиц А. Х.); проф. Н. А. Панькин (Московский институт инженеров железнодорожного транспорта)

Шестаков А. А., Малышева И. А., Полозков Д. П.

Ш51 Курс высшей математики: Интегральное исчисление. Дифференциальные уравнения. Векторный анализ: Учеб. для студентов втузов/Под ред. А. А. Шестакова. — М.: Высш. шк., 1987. — 320 с.: ил.

Учебник представляет собой второй том курса высшей математики и является продолжением книги Мантурова О. В., Матвеева Н. М. «Курс высшей математики. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной» (М., 1986). Он предназначен для студентов-заочников инженерно-технических специальностей втузов и написан в соответствии с программой по математике для указанных специальностей. Большое внимание уделено разбору примеров и задач. Имеются задачи для самостоятельного решения.

Ш $\dfrac{1702010000(4309000000)-517}{001(01)-87}$ 116—87 ББК 22.11
51

Учебное издание

Александр Андреевич Шестаков, Ирина Анатольевна Малышева
Дмитрий Петрович Полозков

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ.

Зав. редакцией Е. С. Гридасова. Редактор А. М. Суходский. Мл. редакторы: Г. В. Вятоха, Н. П. Майкова. Оформление художника Ю. Д. Федичкина. Художественный редактор В. И. Пономаренко. Технический редактор Э. М. Чижевский. Корректор Г. Н. Буханова

ИБ № 6157

Изд. № ФМ-842. Сдано в набор 23.02.87. Подп. в печать 14.09.87. Формат 60×88¹/₁₆. Бум. офс. № 2. Гарнитура литературная. Печать офсетная. Объем 19,6 усл. печ. л. +0,25 усл. печ. л. форзац. усл. кр.-отт.21,18 уч.-изд. л.+0,33 уч. изд. л. форзац. Тираж 59 000 экз. Зак. № 1178. Цена 1 руб.
Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14

Московская типография № 8 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
101898, Москва, Центр, Хохловский пер., 7

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга представляет собой второй том учебника по высшей математике для студентов-заочников инженерно-технических специальностей вузов, изучающих курс высшей математики по программе на 510 часов, утвержденной Минвузом СССР. Она является продолжением книги Мантурова О. В., Матвеева Н. М. «Курс высшей математики: Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной» (М., 1986). Содержание учебника отвечает указанной программе, причем названия глав и параграфов почти дословно повторяют соответствующие пункты программы.

В книге дано систематическое изложение соответствующих разделов курса высшей математики на достаточном для втуза уровне строгости, разобраны примеры, приведены упражнения для самостоятельного решения.

В настоящем учебнике учтен накопленный авторами опыт преподавания высшей математики во Всесоюзном заочном институте инженеров железнодорожного транспорта, в частности, использован курс лекций, прочитанный проф. А. А. Шестаковым.

Указанный курс содержит ряд методических новшеств, которые нашли свое отражение и в учебнике. Например, приведены определения общего, частного, особого и составного решений для дифференциальных уравнений и систем таких уравнений, отличные от общепринятых; при решении дифференциальных уравнений первого порядка, интегрируемых в квадратурах, рассмотрен единый подход, основанный на подборе соответствующих интегрирующих множителей, что позволяет свести решение указанных классов уравнений к решению уравнений в полных дифференциалах; при изложении теории кратных, криволинейных и поверхностных интегралов подчеркивается единообразность определений вводимых понятий как пределов соответствующих сумм, а также рассматриваются физические задачи, приводящие к определениям этих понятий.

Многие определения, теоремы, формулы сопровождаются комментариями, которые позволяют подробно раскрыть содержание вводимых понятий, смысл теорем и формул, раскрыть связь излагаемого материала с предшествующим, указать возможные применения соответствующих теорем и формул.

Материал повышенного уровня сложности предназначен для более углубленного изучения и набран мелким шрифтом, а соответствующие параграфы отмечены звездочкой.

Авторы рекомендуют студентам не ограничиваться решением примеров, содержащихся в «Упражнениях» к каждому параграфу учебника, а обращаться к задачникам из приведенного списка литературы.

По мнению авторов, принятая в книге форма изложения будет способствовать лучшему восприятию материала студентами-заочниками высших технических учебных заведений.

Изложенный в учебнике материал распределился между авторами следующим образом: глава I написана ст. препод. Д. П. Полозковым, главы II—V — доц. И. А. Малышевой, главы VI—VIII — проф. А. А. Шестаковым. В написании глав II—V принимал также участие А. А. Шестаков, а в написании глав VI—VIII — В. Б. Карпухин. Общее редактирование книги осуществлено А. А. Шестаковым.

Авторы глубоко признательны проф. Н. А. Панькину, проф. А. Х. Лившицу и возглавляемому им коллективу кафедры высшей математики МХТИ им. Д. И. Менделеева за большое число ценных замечаний и советов, учтенных при подготовке настоящей книги. Авторы благодарны также Ю. И. Голечкову за помощь в составлении ответов к упражнениям.

Авторы

Глава I

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1.1. Первообразная. Неопределенный интеграл, его свойства

1°. Первообразная. В математике, как правило, для каждого действия над изучаемыми объектами (числами, функциями, векторами и т. п.) определяется и обратное действие: сложение — вычитание, умножение — деление, возведение в степень — извлечение корня и т. п. Основным действием дифференциального исчисления является *дифференцирование* — отыскание производной данной функции. Действием, обратным дифференцированию, является *интегрирование* — отыскание такой функции, для которой данная функция является производной.

Определение 1. Функция F называется *первообразной* для функции f на некотором множестве G, если обе эти функции определены на множестве G и функция f является на нем производной для функции F, т. е. выполняется тождество

$$F'(x)=f(x) \quad \forall\, x\in G,\ G\subset \mathbf{R}.$$

Примеры. 1. Функция $F(x)=(1/3)x^3$ является первообразной для функции $f(x)=x^2$ при всех x.

2. Функция $F(x)=(1/3)x^3+5$ есть первообразная для функции $f(x)=x^2$ при всех x.

3. Функция $F(x)=1/x$ является первообразной для функции $f(x)=-1/x^2$ при всех x, за исключением точки $x=0$.

4. Функция $F(x)=\ln x$ — первообразная для функции $f(x)=1/x$ на бесконечном интервале $]0, +\infty[$.

Если первообразная функция $F(x)$ и ее производная $f(x)$ определяются некоторыми аналитическими выражениями, то множества, на которых эти выражения имеют смысл, и множество G, где $F'(x)=f(x)$, не обязательно совпадают. Так, в примере 4 аналитическое выражение $\ln x$ имеет смысл на бесконечном интервале $]0, +\infty[$, а аналитическое выражение $1/x$ — на объединении двух бесконечных интервалов $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. Вместе с тем множество G, где $(\ln x)'=1/x$, является бесконечным интервалом $]0, +\infty[$. Оно совпадает с множеством, где определена функция $F(x)=\ln x$, но является только подмножеством, на котором имеет смысл аналитическое выражение $1/x$. Функция $F(x)=\ln x$, естественно, не может быть первообразной для функции $f(x)=1/x$, а функция $f(x)=1/x$ — производной для функции $F(x)=\ln x$ в бесконечном интервале $]-\infty, 0[$, хотя бы уже потому, что в нем функция $F(x)=\ln x$ не определена.

Рассмотрим еще два примера, позволяющих ответить на вопрос о первообразной для функции $f(x)=1/x$ в интервале $]-\infty, 0[$.

5. Функция $F(x)=\ln(-x)$, как легко видеть, определена в интервале $]-\infty, 0[$ и является на нем первообразной для функции $f(x)=1/x$. Действительно, $F'(x)=[\ln(-x)]'=[1/(-x)]\cdot(-x)'=1/x=f(x)$.

6. Функция $F(x)=\ln|x|$ есть первообразная для функции $f(x)=1/x$ при всех x, за исключением точки $x=0$. Этот пример позволяет объединить результаты примеров 4 и 5: при $x>0$ имеем $|x|=x$, а при $x<0$ имеем $|x|=-x$.

Как видно из примеров 1 и 2, одна и та же функция может иметь не одну первообразную на одном и том же множестве G.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ имеет хотя бы одну первообразную $F_1(x)$ на некотором множестве G, то выражение $F_1(x)+C$, где C — произвольная постоянная $(-\infty<C<+\infty)$, определяет при любом фиксированном значении $C=C_0$ функцию $F_2(x)=F_1(x)+C_0$, являющуюся также первообразной для той же функции $f(x)$ на том же множестве G.*

Доказательство. Так как по условию $F_1'(x)=f(x)$ $\forall x\in G$, то непосредственной проверкой получаем

$$F_2'(x)=[F_1(x)+C_0]'=F_1'(x)+C_0'=f(x)+0=f(x) \quad \forall x\in G.$$

Следовательно, $F_2'(x)=f(x)$ $\forall x\in G$, т. е. $F_2(x)$ — первообразная для $f(x)$ на множестве G.

Из теоремы 1 следует, что если данная функция $f(x)$ имеет хотя бы одну первообразную $F(x)$ на множестве G, то она имеет на том же множестве бесконечное множество первообразных. Их можно получать из выражения $F(x)+C$, фиксируя значения произвольной постоянной C. Однако, вообще говоря, нельзя утверждать, что таким образом может быть получена любая первообразная функции $f(x)$ на множестве G. Например, непосредственной проверкой легко убедиться, что две функции

$$F_1(x)=\frac{1}{x} \text{ и } F_2(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}-1 \text{ при } x<0,\\ \frac{1}{x}+1 \text{ при } x>0\end{cases}$$

являются первообразными для функции $f(x)=-1/x^2$ на всей числовой прямой, за исключением точки $x=0$: $F'_1(x)=F'_2(x)=$ $=-1/x^2$. Однако их разность

$$F_2(x)-F_1(x)=\begin{cases}-1 \text{ при } x<0,\\ \ \ 1 \text{ при } x>0\end{cases}$$

не является постоянной на всей числовой прямой, а поэтому функцию $F_2(x)$ нельзя получить из выражения $F_1(x)+C$ подбором подходящего значения C.

2°. Неопределенный интеграл. В предыдущем пункте мы отметили, что если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на некотором множестве G, то выражение $F(x)+C$, где C — произвольная постоянная, хотя и определяет бесчисленное множество первообразных, но не охватывает всех первообразных функций $f(x)$ на множестве G. Однако если множество G является интервалом, то положение существенно меняется.

В дальнейшем мы будем рассматривать первообразные на интервале. Чтобы подчеркнуть, что имеется в виду не произвольное множество G, а интервал, заменим обозначение G на I.

Теорема 2. *Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две первообразные функции для функции $f(x)$ в некотором интервале I, то имеет место тождество*

$$F_2(x)=F_1(x)+C \quad \forall x\in I,$$

где C — некоторая постоянная.

Доказательство. Так как по условию функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — первообразные для функции $f(x)$ на интервале I, то они дифференцируемы на нем и $F'_1(x)=F'_2(x)=f(x)$. Введем вспомогательную функцию $\varphi(x)=F_2(x)-F_1(x)$. Эта функция также дифференцируема на I и $\varphi'(x)=F'_2(x)-F'_1(x)=f(x)-f(x)\equiv 0$. Так как функция $\varphi(x)$ дифференцируема на I, то на любом отрезке, принадлежащем I, к ней можно применить теорему Лагранжа. Зафиксируем точку $x_0\in I$. Тогда для отрезка $[x_0, x]$ (или $[x, x_0]$), где x — произвольная точка I, по теореме Лагранжа имеем $\varphi(x)-$ $-\varphi(x_0)=\varphi'(c)(x-x_0)\equiv 0$. Действительно, точка c заключена между x_0 и x, а значит, $c\in I$ и $\varphi'(c)=0$. Следовательно, $\varphi(x)=$ $=\varphi(x_0)=C$, т. е. $F_2(x)-F_1(x)=C$ или $F_2(x)=F_1(x)+C$ $\forall x\in I$.

Комментарий к теореме 2. Теорема 1 имеет место для произвольного множества, на котором функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$, в том числе и для интервала; теорема 2 справедлива только для интервала В приведенном в конце п 1°

примере были рассмотрены две функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$, определенные при всех x, за исключением точки $x=0$, а это множество интервалом не является. Поэтому и оказалось возможным, что разность $F_2(x)-F_1(x)$ не постоянна на этом множестве. Если же ограничиться интервалом, не содержащим точку $x=0$, то в соответствии с теоремой 2 разность $F_2(x)-F_1(x)$ является постоянной: она равна -1 на любом интервале, принадлежащем $]-\infty, 0[$, и 1 на любом интервале, принадлежащем $]0, +\infty[$.

Определение 2. Семейство всех первообразных функции $f(x)$ в некотором интервале I называется *неопределенным интегралом* этой функции в интервале I.

Неопределенный интеграл функции $f(x)$ обозначается символом $\int f(x)\,dx$; знак $\int$ называется *знаком неопределенного интеграла*, функция $f(x)$ — *подынтегральной функцией*, а выражение $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением*. Заметим, что в символе, обозначающем неопределенный интеграл, не отражается интервал, на котором этот интеграл рассматривается, но он обязательно подразумевается. Слово «семейство» в определении неопределенного интеграла означает множество, совокупность.

Из теорем 1 и 2 следует, что если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ в некотором интервале, то выражение $F(x)+C$, где C — произвольная постоянная, представляет собой общий вид первообразной для $f(x)$ в этом интервале. Это выражение можно рассматривать как выражение, определяющее семейство функций — первообразных для $f(x)$ в интервале I, т. е. как неопределенный интеграл. Значит,

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C, \tag{1}$$

где $F'(x)=f(x)$, а C — произвольная постоянная $(-\infty<C<+\infty)$.

Произвольная постоянная C в выражении $F(x)+C$ является параметром, определяющим конкретные функции в семействе $F(x)+$ $+C$. Слово «произвольная» означает, что этот параметр не зависит от x и может изменяться произвольно.

Символы $\int f(x)\,dx$ и $F(x)+C$, где $F'(x)=f(x)$, а C — произвольная постоянная, являются двумя различными выражениями, определяющими один и тот же неопределенный интеграл [семейство первообразных для $f(x)$]. Но $\int f(x)\,dx$ — это обозначение семейства в целом, а в выражении $F(x)+C$ выделена конкретная функция $F(x)$ — одна из конкретных первообразных и указана структура выражения, определяющего любую другую первообразную. Функция $F(x)$ является **представителем** семейства $\int f(x)\,dx$. Роль представителя может играть любая функция из семейства. Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — два различных представителя семейства. Тогда выражения $F_1(x)+C$ и $F_2(x)+C$ задают одно и то же семейство — неопределенный интеграл функции $f(x)$:

$$\int f(x)\,dx = F_1(x)+C, \quad \int f(x)\,dx = F_2(x)+C. \tag{2}$$

Однако если, заметив, что в выражениях (2) левые части одинаковы, мы сравним правые части, то следует написать

$$F_1(x)+C_1 = F_2(x)+C_2, \tag{3}$$

где обозначение C заменено соответственно на C_1 и C_2. Дело в том, что формула (1), как и формулы (2), выражает равенство неопределенных интегралов, т. е. совпадение двух семейств функций в целом, а формулу (3) в силу специфики выражения $F(x)+C$ можно рассматривать как обычное равенство конкретных функций, получающихся при различных значениях C_1 и C_2. Однако теперь значения, которые принимают C_1 и C_2, оставаясь независимыми от x, должны быть согласованы между собой. Действительно, так как $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — первообразные для одной и той же функции $f(x)$, то, в силу теоремы 2, $F_2(x)=F_1(x)+a$, где a — постоянная (не произвольная). Значит, из (3) получаем $F_1(x)+C_1=F_1(x)+$ $+a+C_2$, т. е. $C_1=a+C_2$.

Пример 1. Очевидно, $\int x^2\,dx=(1/3)\,x^3+C_1=(1/3)\,x^3+5+C_2$ (см. примеры 1 и 2 п. 1°). Следовательно, $C_1=5+C_2$.

Выражение $F(x)+C$ может быть записано и в других формах. Слагаемое C можно представить в виде некоторой функции $C(c)$, аргумент c которой также не зависит от x. При этом только следует иметь в виду, что областью значений этой функции должна быть вся числовая прямая: $-\infty<C(c)<+\infty$; область же определения, т. е. область значений c, может быть и более узкой.

Пример 2. В интервале $]0, +\infty[$ имеем $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$. Положим $C=\ln c$; здесь $c>0$, $-\infty<\ln c<+\infty$. Тогда $\int \frac{dx}{x} = \ln x + \ln c =$ $=\ln(cx)$.

3°. Геометрический смысл неопределенного интеграла. Пусть задан неопределенный интеграл $F(x)+C$ для функции $f(x)$ в некотором интервале. При фиксированном значении $C=C_1$ получим конкретную функцию $y_1=F(x)+C_1$, для которой можно построить график; его называют *интегральной кривой*. Изменив значение C и положив $C=C_2$, получим другую первообразную функцию с соответствующей новой интегральной кривой. Аналогично можно построить график любой первообразной функции. Следовательно, выражение $y=F(x)+C$ можно рассматривать как уравнение семейства интегральных кривых неопределенного интеграла $F(x)+C$. Величина C является параметром этого семейства — каждому конкретному значению C соответствует единственная интегральная кривая в семействе. Две интегральные кривые не пересекаются — они «параллельны» в том смысле, что расстояние между точками двух различных линий по вертикали является величиной постоянной. Интегральную кривую, соответствующую значению параметра C_2, можно получить из интегральной кривой, соответствующей значению параметра C_1, параллельным сдвигом в направлении оси Oy на величину $|C_2-C_1|$. Чем больше значение параметра C, тем выше соответствующая интегральная кривая.

Чтобы выделить из неопределенного интеграла конкретную первообразную функцию и соответственно из семейства интегральных кривых — конкретную интегральную линию, нужно задать значение C. Практически это часто делают с помощью задания *начальных условий* — пары чисел (x_0, y_0). Начальные условия должны удовлетворять только одному требованию: x_0 должно принадлежать интервалу, на котором определен неопределенный интеграл $F(x)+C$. Подставив начальные условия в уравнение $y=F(x)+C$, получим $y_0=F(x_0)+C$. Для того чтобы последнее равенство было тождеством, следует положить $C=C_0=y_0-F(x_0)$. Тогда $F(x)+C_0$ есть та первообразная функция, которая при $x=x_0$ принимает значение $y=y_0$; уравнение $y=F(x)+C_0$ является уравнением той интегральной кривой, которая проходит через точку (x_0, y_0).

Пример. Дан неопределенный интеграл $\int x^2\,dx$. Найти ту первообразную, которая при $x=3$ принимает значение $y=10$.

Решение. Выше мы установили, что $y=\int x^2\,dx=(1/3)\,x^3+C$. Подставим в это выражение начальные значения $x_0=3$, $y_0=10$; получим $10=(1/3)\cdot 3^3+C$, откуда $C=C_0=1$. Следовательно, искомая первообразная имеет вид $y=(1/3)x^3+1$; это же равенство является уравнением искомой интегральной кривой.

4°. Действия над неопределенными интегралами. Неопределенный интеграл мы определили как семейство функций первообразных для подынтегральной функции. Рассмотрим теперь некоторые действия над ними.

Производной (дифференциалом) неопределенного интеграла будем называть производную (дифференциал) любой функции, входящей в него как в семейство функций.

Так как неопределенный интеграл есть семейство функций, то, дифференцируя эти функции, можно было бы ожидать, что мы получим новое семейство функций. Однако в силу определения неопределенного интеграла производной от него является только одна функция — подынтегральная:

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx=\left[\int f(x)\,dx\right]'=f(x). \tag{4}$$

Аналогично

$$d\int f(x)\,dx=f(x)\,dx. \tag{5}$$

Если неопределенный интеграл записать в виде $F(x)+C$, то можно применить обычное правило дифференцирования суммы:

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx=[F(x)+C]'=F'(x)+C'=f(x)+0=f(x).$$

Произведением $\lambda\int f(x)\,dx$ неопределенного интеграла $\int f(x)\,dx$ на число λ будем называть семейство функций, каждая из которых является произведением одной из функций семейства $\int f(x)\,dx$ на число λ.

Суммой неопределенных интегралов $\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx$ будем называть семейство функций, каждая из которых представляет собой сумму функций, взятых по одной из семейств $\int f_1(x)\,dx$ и $\int f_2(x)\,dx$. Понятие суммы неопределенных интегралов можно распространить на любое число n слагаемых по следующему правилу:

$$\left[\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx+\ldots+\int f_{i-1}(x)\,dx\right]+\int f_i(x)\,dx$$

$$(i=3,\ 4,\ldots,\ n).$$

Операции сложения неопределенных интегралов и умножения неопределенного интеграла на число называются *линейными*. С их помощью можно определить *линейные комбинации* неопределенных интегралов — выражения вида

$$\lambda_1\int f_1(x)\,dx+\lambda_2\int f_2(x)\,dx+\ldots+\lambda_n\int f_n(x)\,dx. \qquad (6)$$

Линейная комбинация неопределенных интегралов определяет, очевидно, семейство функций, каждая из которых представляет собой линейную комбинацию функций, взятых по одной из семейств функций — неопределенных интегралов $\int f_i(x)\,dx\ (i=1,\ 2,\ldots,\ n)$.

Если $F_i(x)$ — соответственно первообразные для $f_i(x)$, т. е. $\int f_i(x)\,dx=F_i(x)+C_i\ (i=1,\ 2,\ldots,\ n)$, то линейную комбинацию (6) неопределенных интегралов можно записать в виде

$$\lambda_1[F_1(x)+C_1]+\lambda_2[F_2(x)+C_2]+\ldots+\lambda_n[F_n(x)+C_n]=$$
$$=[\lambda_1F_1(x)+\lambda_2F_2(x)+\ldots+\lambda_nF_n(x)]+(\lambda_1C_1+\lambda_2C_2+\ldots+\lambda_nC_n)$$

или

$$\lambda_1\int f_1(x)\,dx+\lambda_2\int f_2(x)\,dx+\ldots+\lambda_n\int f_n(x)\,dx=F(x)+C, \qquad (7)$$

где

$$F(x)=\lambda_1F_1(x)+\lambda_2F_2(x)+\ldots+\lambda_nF_n(x),$$

а C — произвольная постоянная, так как она является линейной комбинацией постоянных величин C_i $(i=1, 2, \dots, n)$.

Итак, линейная комбинация неопределенных интегралов $\int f_i(x)\,\mathrm{d}x$ представляет собой семейство функций $F(x)+C$, где C — произвольная постоянная, а $F(x)$ — линейная комбинация первообразных для подынтегральных функций $f_i(x)$ $(i=1, 2, \dots, n)$.

5°. Свойства неопределенного интеграла. Рассмотрим некоторые свойства неопределенного интеграла, вытекающие непосредственно из его определения.

Неопределенный интеграл от линейной комбинации функций равен той же (т. е. с теми же коэффициентами) линейной комбинации неопределенных интегралов от этих функций:

$$\int [\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x)+\dots+\lambda_n f_n(x)]\,\mathrm{d}x=$$
$$=\lambda_1\int f_1(x)\,\mathrm{d}x+\lambda_2\int f_2(x)\,\mathrm{d}x+\dots+\lambda_n\int f_n(x)\,\mathrm{d}x, \tag{8}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — постоянные.

Для доказательства достаточно показать, что дифференциалы левой и правой частей равенства (8) одинаковы. Найдем их, используя соотношение (5) и известные свойства дифференциала:

$$\mathrm{d}\int [\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x)+\dots+\lambda_n f_n(x)]\,\mathrm{d}x=$$
$$=[\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x)+\dots+\lambda_n f_n(x)]\,\mathrm{d}x;$$
$$\mathrm{d}\left[\lambda_1\int f_1(x)\,\mathrm{d}x+\lambda_2\int f_2(x)\,\mathrm{d}x+\dots+\lambda_n\int f_n(x)\,\mathrm{d}x\right]=$$
$$=\lambda_1\mathrm{d}\int f_1(x)\,\mathrm{d}x+\lambda_2\mathrm{d}\int f_2(x)\,\mathrm{d}x+\dots+\lambda_n\mathrm{d}\int f_n(x)\,\mathrm{d}x=$$
$$=\lambda_1 f_1(x)\,\mathrm{d}x+\lambda_2 f_2(x)\,\mathrm{d}x+\dots+\lambda_n f_n(x)\,\mathrm{d}x=$$
$$=[\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x)+\dots+\lambda_n f_n(x)]\,\mathrm{d}x.$$

Итак, дифференциалы левой и правой частей равенства (8) одинаковы, т. е. равенство (8) справедливо.

Отметим частные случаи этого свойства.

Постоянный множитель можно вынести за знак неопределенного интеграла, т. е.

$$\int Af(x)\,\mathrm{d}x=A\int f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{9}$$

где $A\neq 0$ — постоянная.

Неопределенный интеграл от суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) неопределенных интегралов от этих функций, т. е.

$$\int [f_1(x)\pm f_2(x)]\,\mathrm{d}x=\int f_1(x)\,\mathrm{d}x\pm\int f_2(x)\,\mathrm{d}x. \tag{10}$$

До сих пор в выражении неопределенного интеграла $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ мы предполагали, что переменная интегрирования x является независимой. Пусть теперь $x=\varphi(u)$ — непрерывная функция, имеющая непрерывную производную. Тогда $\mathrm{d}x=\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ и подынтегральное выражение неопределенного интеграла преобразуется следующим образом: $f(x)\,\mathrm{d}x=f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$. Покажем, что

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u. \tag{11}$$

Для этого найдем дифференциалы левой и правой частей равенства (11):

$$\mathrm{d}\int f(x)\,\mathrm{d}x=f(x)\,\mathrm{d}x=f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u,$$

$$\mathrm{d}\int f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u=f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Здесь мы воспользовались соотношением (5). Совпадение дифференциалов левой и правой частей равенства (11) доказывает его справедливость.

Комментарии к формуле (11). 1) Формула (11) означает, что в выражении неопределенного интеграла $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ можно рассматривать x не только как аргумент соответствующих функций (первообразной и ее производной), но и как функцию $x=\varphi(u)$. Проводя аналогию со свойствами инвариантности выражения дифференциала функции, здесь можно говорить о свойстве инвариантности выражения неопределенного интеграла $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

2) Из формулы (11) вытекает, что замену переменной в неопределенном интеграле можно производить непосредственно, преобразуя подынтегральное выражение.

Из равенства (5) следует, что если знаки дифференциала и интеграла стоят рядом, причем знак дифференциала предшествует знаку интеграла, то эти знаки взаимно уничтожаются. Выясним теперь, как взаимодействуют знаки интеграла и дифференциала, если знак интеграла предшествует знаку дифференциала. Пусть задан неопределенный интеграл $\int f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C$. Так как на основании формулы (11) можно преобразовывать подынтегральное выражение, вводя функцию под знак дифференциала, а $f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}F(x)$, то

$$\int \mathrm{d}F(x)=F(x)+C. \tag{12}$$

Следовательно, если знаки интеграла и дифференциала стоят рядом, причем знак интеграла предшествует знаку дифференциала, то эти знаки взаимно уничтожаются, а к функции, стоящей под знаком дифференциала, прибавляется произвольная постоянная.

Комментарий к формуле (12). Если в левой части равенства (12) заменить первообразную $F(x)$ на неопределенный интеграл $F(x)+C$, то знаки интеграла и дифференциала взаимно уничтожаются:

$$\int d(F(x)+C)=F(x)+C. \tag{13}$$

6°. Упражнения

Даны функции $f(x)$ и $F(x)$ и точка (x_0, y_0) плоскости. Требуется: а) показать, что функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$; б) записать выражения неопределенного интеграла функции $f(x)$ с помощью знака $\int$ и с помощью ее первообразной функции $F(x)$; в) записать уравнения интегральных кривых, соответствующих данным значениям $C=C_1$ и $C=C_2$ произвольной постоянной C, входящей в выражение неопределенного интеграла, и построить их; г) записать уравнение интегральной кривой, проходящей через точку (x_0, y_0), подобрав соответствующее значение C_0 произвольной постоянной в выражении неопределенного интеграла, и построить ее.

1. $f(x)=2x+4$; $F(x)=x^2+4x$; $C_1=3$, $C_2=5$; $x_0=0$, $y_0=4$.

2. $f(x)=e^{2x}$; $F(x)=0{,}5e^{2x}$; $C_1=-1$, $C_2=1$; $x_0=0$, $y_0=0$.

3. $f(x)=\cos x$; $F(x)=\sin x$; $C_1=-1$, $C_2=1$; $x_0=\pi/2$, $y_0=1$.

§ 1.2. Таблица основных интегралов. Основные методы интегрирования

1°. Задача об отыскании первообразной. Полное решение задачи об отыскании первообразной для данной функции $f(x)$ будет дано в гл. II. В ней вводится понятие определенного интеграла и с его помощью, во-первых, доказывается, что непрерывная в некотором интервале функция имеет в нем первообразную, и, во-вторых, дается способ построения этой первообразной — определенного интеграла с переменным верхним пределом. В частности, всякая элементарная в некотором интервале функция непрерывна в этом интервале, а следовательно, имеет в нем первообразную.

Определенный интеграл с переменным верхним пределом представляет собой аналитическое выражение, но не элементарное, так как его определение предусматривает, наряду с другими операциями, неэлементарную операцию предельного перехода. Однако это не означает, что первообразная не может быть элементарной функцией. Так, во всех примерах § 1.1 первообразные представляют собой элементарные функции. Более того, любая элементарная функция является первообразной для своей производной. Дело в том, что, как известно, одна и та же функция может быть задана различными аналитическими выражениями, тождественными в области определения функции. В частности, существует довольно широкий класс элементарных функций, для которых первообразные могут быть выражены не только через определенные интегралы, ко и в элементарных функциях. Именно такому классу функций и посвящена настоящая глава, и поэтому мы будем слова «найти интеграл» понимать в более узком смысле как «выразить интеграл в элементарных функциях». Выражение интеграла в элементарных функциях, когда это возможно, имеет важное практическое значение, так как элементарные функции являются удобным аппаратом, используемым в различных приложениях математики. Исторически сложилось, что эти функции наиболее подробно изучены, для них составлены справочники, таблицы, разработаны стандартные программы для вычисления их на ЭВМ и т. п.

Если неопределенный интеграл от функции $f(x)$ выражен в элементарных функциях, т. е. представлен в виде $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, где $F(x)$ — элементарная функция, то говорят, что он *выражен в конечном виде.* Заметим, что в конечном виде может быть выражен только интеграл, подынтегральная функция которого элементарна. Действительно, если $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, где $F(x)$ — элементарная функция, то и $f(x) = F'(x)$ — функция элементарная как производная от элементарной функции.

Единого алгоритма для выражения неопределенных интегралов в конечном виде, подобного алгоритму дифференцирования, не существует. Все методы решения этой задачи основаны на том, что любое равенство, выражающее производную для элементарной функции $F(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$, прочитанное «наоборот», позволяет указать первообразную функцию для элементарной функции $f(x)$.

Сначала составляется *таблица основных интегралов* с помощью обращения формул производных основных элементарных функций; неопределенные интегралы, входящие в эту таблицу, называются *табличными.* Затем данный неопределенный интеграл преобразуется так, чтобы можно было применить табличные интегралы. При этом используются основные свойства неопределенных интегралов, приводящие к трем основным методам интегрирования: 1) *разложением*; 2) *подстановкой* (или *заменой переменной*); 3) *по частям.* Процесс применения этих методов существенно опирается на конкретные свойства подынтегральной функции. Несмотря на отсутствие единого алгоритма, удается выделить некоторые типы элементарных функций, для которых можно указать общие приемы их интегрирования в конечном виде.

2°. Таблица основных интегралов. К основным интегралам отнесем следующие интегралы:

I. $\int 0\,du = C.$

II. $\int u^{\alpha}\,du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1;\ \alpha \in \mathbf{R}).$

III. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C.$

IV. $\int e^u\, du = e^u + C.$

V. $\int \cos u\, du = \sin u + C.$

VI. $\int \sin u\, du = -\cos u + C.$

VII. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C.$

VIII. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C.$

IX. $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \begin{cases} \arcsin u + C; \\ -\arccos u + C_1. \end{cases}$

X. $\int \frac{du}{1+u^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} u + C; \\ -\operatorname{arcctg} u + C_1. \end{cases}$

В правые части формул входят основные элементарные функции аргумента u.

С практической точки зрения целесообразно дополнить эту таблицу следующими формулами:

IVa. $\int a^u\, du = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1).$

$$\text{IXa. } \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \begin{cases} \arcsin \frac{u}{a} + C; \\ -\arccos \frac{u}{a} + C_1. \end{cases}$$

$$\text{Xa. } \int \frac{du}{a^2+u^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C; \\ -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{u}{a} + C_1. \end{cases}$$

XI. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C.$

XII. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2+a}\right| + C.$

Формулы IVa, IXa, Xa являются обобщениями формул IV, IX и X, формулы XI и XII дополняют таблицу.

В правых частях формул IX, X, IXa, Xa записаны по два выражения для первообразной. Это значит, что может быть использовано любое из них.

Каждая из формул I—XII справедлива в промежутках, не содержащих точек разрыва подынтегральных функций. Например, для формул IV, V, VI, X — это вся числовая прямая, а для формул II (при целых отрицательных значениях α) и III — это промежутки, не содержащие точку $u=0$.

В каждой формуле под u можно подразумевать непрерывную функцию $u=\varphi(x)$, имеющую непрерывную производную $\varphi'(x)$.

Справедливость формул I—XII легко проверить дифференцированием.

3°. Интегрирование разложением. Если

$$f(x)=\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x)+\ldots+\lambda_n f_n(x), \tag{1}$$

то в силу формулы (8) § 1.1 интеграл $\int f(x)\,dx$ можно записать в виде

$$\int f(x)\,dx=\int[\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x)+\ldots+\lambda_n f_n(x)]\,dx=$$

$$=\lambda_1\int f_1(x)\,dx+\lambda_2\int f_2(x)\,dx+\ldots+\lambda_n\int f_n(x)\,dx. \tag{2}$$

Сущность этого метода состоит в выборе подходящего разложения (1). Интегралы $\int f_i(x)\,dx$ в формуле (2) должны быть в определенном смысле более простыми по сравнению с первоначально заданным интегралом. Наиболее простым является такой случай, когда в формуле (2) интегралы $\int f_i(x)\,dx$ — табличные.

Примеры. 1. Найти $I=\int(1+\sqrt{x})^2\,dx$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию; имеем $(1+\sqrt{x})^2=1+2\sqrt{x}+x$. Следовательно,

$$I=\int(1+2\sqrt{x}+x)\,dx=\int dx+2\int x^{1/2}\,dx+\int x\,dx=$$

$$=x+2\frac{x^{3/2}}{3/2}+\frac{x^2}{2}+C=x+\frac{4}{3}x\sqrt{x}+\frac{1}{2}x^2+C.$$

2. Найти $I=\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

Решение. Так как

$$\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x},$$

то

$$I=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C.$$

3. Найти $I=\int 6\sin^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$.

Решение. Имеем $6\sin^2\frac{x}{2}=3\cdot 2\sin^2\frac{x}{2}=3(1-\cos x)$. Поэтому

$$I=\int 3(1-\cos x)\,\mathrm{d}x=3\left(\int \mathrm{d}x-\int \cos x\,\mathrm{d}x\right)=3(x-\sin x)+C.$$

4. Найти $I=\int e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

Решение. $I=\int\left(e^x+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\int e^x\,\mathrm{d}x+\int x^{-2}\,\mathrm{d}x=e^x+ +\frac{x^{-1}}{-1}+C=e^x-\frac{1}{x}+C$.

4⁰. Интегрирование подстановкой (заменой переменной). Этот метод основан на возможности замены переменной в подынтегральном выражении под знаком неопределенного интеграла. Пусть дан неопределенный интеграл $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Введем новую переменную u, связанную с x зависимостью

$$x=\varphi(u),\quad u=\psi(x), \tag{3}$$

где функции $\varphi(u)$ и $\psi(x)$ — взаимно обратные, непрерывные и имеющие непрерывные производные в соответствующих интервалах изменения переменных x и u. Преобразование интеграла $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ в интеграл $\int g(u)\,\mathrm{d}u$ возможно с помощью двух вариантов подстановок.

Первый вариант подстановки [использование функции $x=\varphi(u)$]. Произведя в данном интеграле $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ подстановку $x=\varphi(u)$, $\mathrm{d}x=\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ (см. формулу (11) § 1.1), получим

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u=\int g(u)\,\mathrm{d}u, \tag{4}$$

где $g(u)=f(\varphi(u))\varphi'(u)$.

Второй вариант подстановки [использование функции $u=\psi(x)$]. Пусть функция $f(x)$ представлена в виде

$$f(x)=g(\psi(x))\psi'(x). \tag{5}$$

Тогда

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int g(\psi(x))\psi'(x)\,\mathrm{d}x=\int g(u)\,\mathrm{d}u, \tag{6}$$

где $u=\psi(x)$.

Формулы (4) и (6) выражают сущность метода подстановки. Если $\int g(u)\,\mathrm{d}u=G(u)+C$, то в обоих случаях получаем

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int g(u)\,\mathrm{d}u=G(u)+C. \tag{7}$$

Формула (7) в сочетании с $u=\psi(x)$ определяет $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ как сложную функцию с промежуточным аргументом u:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=G(u)+C=G(\psi(x))+C=F(x)+C, \tag{8}$$

а та же формула (7) в сочетании с $x=\varphi(u)$ определяет $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ как параметрически заданную функцию с параметром u:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=G(u)+C,\ x=\varphi(u). \tag{9}$$

От равенств (9) можно перейти к формуле (8), исключив параметр u с помощью той же функции $u=\psi(x)$, обратной для функции $x=\varphi(u)$.

Комментарий к формулам (4) и (6). Формулы (4) и (6) отличаются «промежуточными» интегралами $\int f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ [в(4)] и $\int g(\psi(x))\psi'(x)\,\mathrm{d}x$ [в(6)]. В формуле (4) мы имеем дело с «выведением множителя из-под знака дифференциала»: $\mathrm{d}x=\mathrm{d}\varphi(u)=\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$, а в формуле (6) — с «введением множителя под знак дифференциала»: $\psi'(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}\psi(x)=\mathrm{d}u$.

Метод подстановки целесообразно применять, если интеграл $\int g(u)\,\mathrm{d}u$ в каком-то смысле «проще», чем $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ (например, интеграл $\int g(u)\,\mathrm{d}u$ или уже табличный, или «ближе к табличному», или для него яснее путь дальнейших преобразований и т. п.). Успех применения метода подстановки зависит от удачного выбора новой переменной, т. е. от выбора функций (3).

Примеры. 1. Найти $I=\int\cos 3x\,\mathrm{d}x$.

Решение. Этот интеграл напоминает табличный интеграл V, но «мешает» коэффициент 3 перед x. Примем $3x$ за новую переменную u; имеем $3x=u$, $x=(1/3)x$, $\mathrm{d}x=(1/3)\,\mathrm{d}u$, следовательно,

$$I=\int\cos u\,(1/3)\,\mathrm{d}u=(1/3)\int\cos u\,\mathrm{d}u=(1/3)\sin u+C=(1/3)\sin 3x+C.$$

2. Найти $\int(x-2)^5\,\mathrm{d}x$.

Решение. Положим $x-2=u$, $x=u+2$, $\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$. Значит, $\int(x-2)^5\,\mathrm{d}x=\int u^5\,\mathrm{d}u=(1/6)u^6+C=(1/6)(x-2)^6+C$.

Заметим, что в методе подстановки можно и не вводить явное обозначение новой переменной. Так, в примере 1 очевидные преобразования приводят данный интеграл к виду

$$\int\cos 3x\,\mathrm{d}x=(1/3)\int\cos(3x)\,\mathrm{d}(3x).$$

Теперь можно принять $3x$ за новую переменную (без обозначения ее буквой u) и сразу, «непосредственно» применить табличный интеграл V. Здесь простейшая подстановка производится как бы «в уме». Такой прием называют *непосредственным интегрированием.* В примере 2 непосредственное интегрирование выглядит так:

$$\int (x-2)^5\,\mathrm{d}x = \int (x-2)^5\,\mathrm{d}(x-2) = (1/6)(x-2)^6 + C.$$

Рассматривая примеры интегрирования функций, следует постепенно развивать навыки непосредственного интегрирования.

Полезно обратить внимание на часто применяемые подстановки. Так, например, если известен интеграл $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$, то подстановка $ax+b=u$, $a\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}x=(1/a)\,\mathrm{d}u$ дает

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = (1/a)\int f(u)\,\mathrm{d}u = (1/a)F(u) + C = (1/a)F(ax+b) + C,$$

или короче

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = (1/a)F(ax+b) + C. \qquad (10)$$

Примеры. 3. Найти $\int \frac{\mathrm{d}x}{2-5x}$.

Р е ш е н и е. $\int \frac{\mathrm{d}x}{2-5x} = -\frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}(2-5x)}{2-5x} = -\frac{1}{5}\ln|2-5x| + C.$

4. Найти $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-4x^2}}$.

Р е ш е н и е. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-4x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(2x)}{\sqrt{9-(2x)^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{3} + C.$

Для нахождения подстановки, упрощающей данный интеграл, следует обратить внимание на второй вариант подстановки — формулы (5) и (6). При этом полезно вырабатывать навыки «введения множителя под знак дифференциала», т. е. чтения формулы дифференцирования $\mathrm{d}u(x) = u'(x)\,\mathrm{d}x$ «наоборот»: $u'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u(x)$.

Примеры. 5. Найти $\int \frac{\arcsin x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Р е ш е н и е. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \arcsin x\,\mathrm{d}(\arcsin x) = (1/2) \times$ $\times (\arcsin x)^2 + C$. Здесь $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x\,(\arcsin x)'\,\mathrm{d}x =$ $= \arcsin x\,\mathrm{d}(\arcsin x)$. Мы представили подынтегральную функцию в виде (5), затем ввели $(\arcsin x)'$ под знак дифференциала и, наконец, применили непосредственно табличный интеграл II.

6. Найти $\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$.

Решение. $\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{(\cos x)'\,dx}{\cos x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} =$
$= -\ln|\cos x| + C$.

Иногда подстановка сразу не приводит к цели, но упрощает подынтегральное выражение и проясняет ход дальнейших преобразований.

Примеры. 7. Найти $I = \int \frac{dx}{(x^2+2x+2)\operatorname{arctg}(x+1)}$.

Решение. Заметив, что $x^2+2x+2=(x+1)^2+1$, заключаем, что подынтегральная функция зависит от $x+1$, а $(x+1)'=1$, т. е. в соответствии с формулой (5) имеем $f(x)=g(x+1)(x+1)'$. Введя множитель $(x+1)'$ под знак дифференциала: $(x+1)'dx=d(x+1)$, сделаем подстановку $x+1=u$, а затем продолжим преобразование данного интеграла:

$$I = \int \frac{du}{(1+u^2)\operatorname{arctg} u} = \int \frac{d(\operatorname{arctg} u)}{\operatorname{arctg} u} = \ln|\operatorname{arctg} u| + C =$$
$$= \ln|\operatorname{arctg}(x+1)| + C.$$

8. Найти $\int \frac{2x\,e^{x^2}\,dx}{1+e^{2x^2}}$.

Решение. $\int \frac{2x\,e^{x^2}}{1+e^{2x^2}}\,dx = \int \frac{e^{x^2}\,d(x^2)}{1+e^{2x^2}} = \int \frac{d(e^{x^2})}{1+(e^{x^2})^2} = \operatorname{arctg} e^{x^2} + C$.

Здесь мы, не вводя новых обозначений, т. е. непосредственно, произвели фактически следующие подстановки: 1) $2x\,dx=d(x^2)$, $x^2=u$; 2) $e^u du = de^u$, $e^u = v$.

9. Найти $I = \int (1+\sqrt{x})^{10}\,dx$.

Решение. Этот интеграл напоминает интеграл из примера 1 п. 3°, который был найден разложением. Однако здесь применение метода разложения приведет к слишком громоздким выражениям и преобразованиям вследствие очень высокой (десятой) степени бинома. Произведем подстановку $1+\sqrt{x}=u$, $x=(u-1)^2$, $dx=$ $=2(u-1)\,du$. Тогда $(1+\sqrt{x})^{10}\,dx = u^{10}\cdot 2(u-1)\,du$, т. е.

$$I = 2\int (u^{11}-u^{10})\,du = 2\left(\int u^{11}\,du - \int u^{10}\,du\right) =$$
$$= 2\left(\frac{u^{12}}{12} - \frac{u^{11}}{11}\right) + C = \frac{1}{66}u^{11}(11u-12) + C =$$
$$= \frac{1}{66}(1+\sqrt{x})^{11}(11\sqrt{x}-1) + C.$$

Здесь наряду с интегрированием подстановкой применено и интегрирование разложением.

Для нахождения одного и того же интеграла могут быть применены различные способы преобразования подынтегрального выражения. При этом найденные первообразные могут оказаться различными по виду. Однако известно, что две первообразных для одной и той же функции могут отличаться друг от друга лишь на некоторое постоянное слагаемое.

Примеры. 10. Найти $I=\int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}\,dx$.

Решение. I способ (разложение). Находим

$$I=\int \frac{1+2\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}}\,dx=\int (x^{-1/2}+2+x^{1/2})\,dx=$$

$$=\frac{x^{1/2}}{1/2}+2x+\frac{x^{3/2}}{3/2}+C=\frac{2}{3}(3\sqrt{x}+3x+x\sqrt{x})+C.$$

II способ (подстановка). Положим $1+\sqrt{x}=t$; тогда $x=(t-1)^2$, $dx=2(t-1)\,dt$. Таким образом,

$$I=\int \frac{t^2}{t-1}\cdot 2(t-1)\,dt=2\int t^2\,dt=\frac{2}{3}t^3+C_1=\frac{2}{3}(1+\sqrt{x})^3+C_1.$$

Получились различные по форме записи результаты, однако $\frac{2}{3}(1+\sqrt{x})^3=\frac{2}{3}(3\sqrt{x}+3x+x\sqrt{x})+\frac{2}{3}$; следовательно, $C=C_1+\frac{2}{3}$.

11. Найти $I=\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

Решение. Здесь мы имеем тот же интеграл, что и в примере 2 п. 3°. Ранее методом разложения мы нашли, что $I=\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x+C$.

Применим теперь метод подстановки, предварительно преобразовав подынтегральную функцию:

$$I=\int \frac{4\,dx}{\sin^2 2x}=2\int \frac{d(2x)}{\sin^2 2x}=-2\operatorname{ctg} 2x+C_1.$$

Постоянную мы обозначили через C_1, так как, вообще говоря, она может отличаться от постоянной C в найденном ранее неопределенном интеграле. Итак, имеем два результата, полученных разными способами интегрирования: $\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x+C$ и $-2\operatorname{ctg} 2x+C_1$. Преобразуем второе выражение:

$$-2\operatorname{ctg} 2x=-\frac{2\cos 2x}{\sin 2x}=\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x,$$

т. е. второй результат тождествен первому.

Иногда такие преобразования могут оказаться не столь простыми и очевидными. Однако всегда результат может быть проверен дифференцированием. Так, в данном случае

$$(\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x},$$

$$(-2 \operatorname{ctg} 2x)' = \frac{2 \cdot 2}{\sin^2 2x} = \frac{4}{4 \sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}.$$

Равенство производных показывает, что функции $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$ и $-2 \operatorname{ctg} 2x$ могут отличаться не более чем на постоянное слагаемое, а это для первообразных одной и той же функции вполне возможно (выше показано, что указанные функции не отличаются даже этим). Совпадение же производных с подынтегральной функцией свидетельствует о том, что неопределенный интеграл найден правильно.

Применяя сочетание методов подстановки и разложения, найдем интеграл вида $\int \frac{(Mx+N)\,dx}{ax^2+bx+c}$, где $a \neq 0$, b, c, M, N — постоянные. Числитель подынтегральной функции представим в виде линейной комбинации производной от квадратного трехчлена $(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b$ и некоторой постоянной; имеем $Mx + N = \frac{M}{2a}(2ax+b) + \left(N - \frac{Mb}{2a}\right)$. Далее, получим

$$\int \frac{(Mx+N)\,dx}{ax^2+bx+c} = \int \frac{\frac{M}{2a}(2ax+b) + \left(N - \frac{Mb}{2a}\right)}{ax^2+bx+c}\,dx =$$

$$= \frac{M}{2a} \int \frac{d(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c} + \left(N - \frac{Mb}{2a}\right) \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} =$$

$$= \frac{M}{2a} \ln|ax^2+bx+c| + \left(N - \frac{Mb}{2a}\right) \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

Первый интеграл здесь найден непосредственно с использованием табличного интеграла III без введения новой переменной $v = ax^2 + bx + c$. Знаменатель второго интеграла преобразуем к виду $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right]$, где $D = b^2 - 4ac$ — дискриминант квадратного трехчлена; такое преобразование квадратного трехчлена называется **выделением полного квадрата**. Обозначив $\frac{|D|}{4a^2} = p^2$ и произведя подстановку $x + \frac{b}{2a} = u$, получим $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a} \int \frac{du}{u^2 \pm p^2}$. Таким образом второй интеграл сводится к табличным интегралам X, Xa, XI, II (при $\alpha = -2$).

Примеры. 12. Найти $I=\int\frac{(16x+3)\,\mathrm{d}x}{4x^2+4x+5}$.

Решение. Имеем $(4x^2+4x+5)'=8x+4$, $16x+3=2(8x+4)-5$. Поэтому

$$I=\int\frac{2(8x+4)-5}{4x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x=2\int\frac{\mathrm{d}(4x^2+4x+5)}{4x^2+4x+5}-\frac{5}{4}\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1}=$$

$$=2\ln(4x^2+4x+5)-\frac{5}{4}\operatorname{arctg}\left(x+\frac{1}{2}\right)+C.$$

Оба интеграла найдены непосредственно с помощью табличных интегралов III и X. При этом под знаком ln знак модуля опущен, так как $4x^2+4x+5=(2x+1)^2+4>0$.

13. Найти $I=\int\frac{(3x-7)\,\mathrm{d}x}{x^2+3x+2}$.

Решение. Имеем $(x^2+3x+2)'=2x+3$, $3x-7=\frac{3}{2}(2x+3)-\frac{23}{2}$. Следовательно,

$$I=\int\frac{\frac{3}{2}(2x+3)-\frac{23}{2}}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+3x+2)}{x^2+3x+2}-\frac{23}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{3}{2}\right)}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}=$$

$$=\frac{3}{2}\ln|x^2+3x+2|-\frac{23}{2}\ln\left|\frac{x+3/2-1/2}{x+3/2+1/2}\right|+C=$$

$$=\frac{3}{2}\ln|x^2+3x+2|-\frac{23}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|+C.$$

14. Найти $I=\int\frac{(3x-7)}{x^2+4x+4}\,\mathrm{d}x$.

Решение. Имеем $(x^2+4x+4)'=2x+4$, $3x-7=\frac{3}{2}(2x+4)-13$. Значит,

$$I=\int\frac{\frac{3}{2}(2x+4)-13}{x^2+4x+4}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+4x+4)}{x^2+4x+4}-13\int\frac{\mathrm{d}(x+2)}{(x+2)^2}=$$

$$=\frac{3}{2}\ln(x^2+4x+4)+\frac{13}{x+2}+C=3\ln|x+2|+\frac{13}{x+2}+C.$$

Аналогично можно найти и интеграл вида $\int \frac{(Mx+N)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Производя те же преобразования и используя те же обозначения, получим

$$\int \frac{(Mx+N)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{M}{2a}\int \frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} =$$
$$= \frac{M}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int \frac{du}{\sqrt{a(u^2\pm p^2)}}.$$

Второй интеграл сводится к табличным интегралам IX, IXa, XII, III. Однако надо учесть, что если одновременно $D\leqslant 0$ и $a<0$, то квадратный трехчлен $ax^2+bx+c\leqslant 0$ при всех значениях x и интеграл не имеет смысла. Так, например, не имеет смысла интеграл $\int \frac{(2x+3)\,dx}{\sqrt{-x^2+4x-5}}$; здесь $a=-1<0$, $b=4$, $c=-5$, $D=-4<0$, $-x^2+4x-5=-(x-2)^2-1<0$. Также не имеет смысла и интеграл $\int \frac{(2x+3)\,dx}{\sqrt{-x^2+4x-4}}$; здесь $a=-1<0$, $b=4$, $c=-4$, $D=0$, $-x^2+4x-4=-(x-2)^2\leqslant 0$.

Во всех приведенных ниже примерах условие $D\leqslant 0$, $a<0$ не выполняется, поэтому рассмотренные в них интегралы имеют смысл.

Примеры. 15. Найти $I=\int \frac{(2x+5)\,dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$.

Решение. Имеем $(3-2x-x^2)'=-2x-2$, $2x+3=-(-2x-2)+3$. Таким образом,

$$I=\int \frac{-(-2x-2)+3}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx = -\int \frac{d(3-2x-x^2)}{\sqrt{3-2x-x^2}} + 3\int \frac{d(x+1)}{\sqrt{4-(x+1)^2}} =$$
$$= -2\sqrt{3-2x-x^2} + 3\arcsin\frac{x+1}{2} + C.$$

16. Найти $I=\int \frac{(3x-1)\,dx}{\sqrt{x^2+2x-2}}$.

Решение. Имеем $(x^2+2x-2)'=2x+2$, $3x-1=\frac{3}{2}(2x+2)-4$. Следовательно,

$$I=\int \frac{\frac{3}{2}(2x+2)-4}{\sqrt{x^2+2x-2}}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2+2x-2)}{\sqrt{x^2+2x-2}} - 4\int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2-3}} =$$
$$= 3\sqrt{x^2+2x-2} - 4\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-2}\right| + C.$$

17. Найти $I=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+1}}$.

Решение. Имеем $x^2+2x+1=(x+1)^2$, $\sqrt{x^2+2x+1}=|x+1|$.

Значит,

$$I=\int\frac{d(x+1)}{|x+1|}=\begin{cases}\ln|x+1|+C_1 \text{ при } x>-1,\\ -\ln|x+1|+C_2 \text{ при } x<-1.\end{cases}$$

5°. Интегрирование по частям. Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — две непрерывные функции, имеющие непрерывные производные. Тогда в силу очевидных соотношений

$$u(x)v'(x)=[u(x)v(x)]'-u'(x)v(x),$$

$$\int[u(x)v(x)]'\,dx=u(x)v(x)+C,$$

применив интегрирование разложением, получаем

$$\int u(x)v'(x)\,dx=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)\,dx. \qquad (11)$$

Постоянная интегрирования при замене интеграла $\int[u(x)v(x)]'\,dx$ выражением $u(x)v(x)$ здесь опущена, так как в правой части формулы (11) имеется неопределенный интеграл $\int u'(x)v(x)\,dx$. Эта формула может быть использована для нахождения интеграла $\int f(x)\,dx$, если представить подынтегральную функцию $f(x)$ в виде произведения $f(x)=u(x)v'(x)$, где $u(x)$ — непрерывная функция и $v'(x)$ — непрерывная производная от непрерывной функции $v(x)$. Применение формулы (11) для интегрирования функций называют методом интегрирования по частям. С помощью этого метода отыскание интеграла $\int u(x)v'(x)\,dx$ сводится к отысканию интеграла $\int u'(x)v(x)\,dx$.

Представление данной функции $f(x)$ в виде произведения $u(x)v'(x)$ можно осуществить различными способами. Практически после выбора функций $u(x)$ и $v'(x)$ нужно найти функции $u'(x)$ и $v(x)=\int v'(x)\,dx$, причем достаточно найти какую-нибудь одну из первообразных функции $v'(x)$, опустив постоянную интегрирования. Применение метода интегрирования по частям будет успешным, если интеграл $\int u'(x)v(x)\,dx$ в правой части формулы (11) окажется «проще» интеграла $\int u(x)v'(x)\,dx$.

Пример 1. Найти $\int x\sin x\,dx$.

Решение. Положим $u=x$, $v'=\sin x$, откуда $u'=1$, $v=$ $=\int\sin x\,dx=-\cos x$. Следовательно,

$$\int x\sin x\,dx=x(-\cos x)-\int 1\cdot(-\cos x)\,dx=-x\cos x+\sin x+C.$$

Если в этом же примере положить $u=\sin x$, $v'=x$, то формула (11) приведет к интегралу $\int x^2\cos x\,\mathrm{d}x$, более сложному, чем данный.

Так как $v'(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}v(x)$, а $u'(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}u(x)$, то формулу (11) часто записывают в виде

$$\int u\,\mathrm{d}v=uv-\int v\,\mathrm{d}u, \tag{12}$$

вводя множители v' и u' под знаки дифференциалов. При этом в некоторых случаях интегрирование по частям можно осуществлять, не вводя явно обозначения u и v, аналогично приему непосредственного интегрирования (см. п. 4°). Так, решение примера 1 можно записать следующим образом:

$$\int x\sin x\,\mathrm{d}x=\int x\,\mathrm{d}(-\cos x)=x(-\cos x)-\int(-\cos x)\,\mathrm{d}x=$$
$$=-x\cos x+\sin x+C.$$

Иногда интегрирование по частям приходится применять последовательно не один раз.

Примеры. 2. Найти $\int(x^2+2x+3)e^{2x}\,\mathrm{d}x$.

Решение. $\int(x^2+2x+3)e^{2x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(x^2+2x+3)\,\mathrm{d}(e^{2x})=$

$$=\frac{1}{2}\left[(x^2+2x+3)\,e^{2x}-\int e^{2x}\mathrm{d}(x^2+2x+3)\right]=\frac{1}{2}(x^2+2x+3)\,e^{2x}-$$
$$-\int(x+1)\,e^{2x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(x^2+2x+3)\,e^{2x}-\frac{1}{2}\int(x+1)\,\mathrm{d}(e^{2x})=$$
$$=\frac{1}{2}(x^2+2x+3)\,e^{2x}-\frac{1}{2}\left[(x+1)e^{2x}-\int e^{2x}\,\mathrm{d}(x+1)\right]=$$
$$=\frac{1}{2}(x^2+2x+3)\,e^{2x}-\frac{1}{2}(x+1)e^{2x}+\frac{1}{2}\int e^{2x}\,\mathrm{d}x=$$
$$=\frac{1}{2}(x^2+2x+3)\,e^{2x}-\frac{1}{2}(x+1)e^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}+C=$$
$$=\frac{1}{4}(2x^2+2x+5)\,e^{2x}+C.$$

3. Найти $I=\int e^{2x}\cos 3x\,\mathrm{d}x$.

Решение. $I=\frac{1}{2}\int\cos 3x\,\mathrm{d}(e^{2x})=\frac{1}{2}\left(\cos 3x\,e^{2x}-\int e^{2x}\mathrm{d}\cos 3x\right)=$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x+\frac{3}{2}\int e^{2x}\sin 3x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x+$$

$$+\frac{3}{4}\int \sin 3x\,\mathrm{d}(e^{2x})=\frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x+\frac{3}{4}\left(e^{2x}\sin 3x-\int e^{2x}\mathrm{d}\sin 3x\right)=$$
$$=\frac{1}{4}(2\cos 3x+3\sin 3x)e^{2x}-\frac{9}{4}\int e^{2x}\cos 3x\,\mathrm{d}x.$$

В результате двух последовательных интегрирований по частям имеем

$$I=\frac{1}{4}(2\cos 3x+3\sin 3x)e^{2x}-\frac{9}{4}I,$$

т. е. снова возвратились к исходному интегралу. Это равенство можно рассматривать как уравнение относительно искомого интеграла. Следовательно,

$$\frac{13}{4}I=\frac{1}{4}(2\cos 3x+3\sin 3x)e^{2x}+C_1,$$

откуда

$$I=\frac{1}{13}(2\cos 3x+3\sin 3x)e^{2x}+C.$$

Постоянное слагаемое C_1 появилось после переноса интеграла в левую часть равенства, так как в правой части осталась одна конкретная первообразная; затем мы положили $\frac{4}{13}C_1=C$.

6°. Интегрирование некоторых классов тригонометрических функций. Рассмотрев основные методы интегрирования, перейдем теперь к применению этих методов для интегрирования некоторых типов элементарных функций. В следующем параграфе будет рассмотрен довольно обширный класс рациональных функций; в настоящем пункте мы остановимся на интегрировании некоторых тригонометрических функций.

1. *Функции вида* $\sin mx\cos nx$, $\cos mx\cos nx$, $\sin mx\sin nx$. Для нахождения интегралов от этих функций используют формулы разложения произведений в суммы:

$$\begin{aligned}
\sin mx\cos nx&=\frac{1}{2}[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x],\\
\cos mx\cos nx&=\frac{1}{2}[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x],\\
\sin mx\sin nx&=\frac{1}{2}[-\cos(m+n)x+\cos(m-n)x].
\end{aligned}\tag{13}$$

Если $m\neq n$, то интегралы от произведений сводятся к линейным комбинациям интегралов вида $\int\cos kx\,\mathrm{d}x$ и $\int\sin kx\,\mathrm{d}x$, которые находятся по формулам

$$\int \cos kx\,dx = \frac{1}{k}\sin kx + C,\quad \int \sin kx\,dx = -\frac{1}{k}\cos kx + C. \qquad (14)$$

Примеры. 1. Найти $\int \sin 3x\cos 2x\,dx$.

Решение. $\int \sin 3x\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int(\sin 5x + \sin x)\,dx =$

$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\cos 5x - \cos x\right) + C = -\frac{1}{10}(\cos 5x + 5\cos x) + C.$

2. Найти $\int \sin x\cos 3x\,dx$.

Решение. $\int \sin x\cos 3x\,dx = \frac{1}{2}\int[\sin 4x + \sin(-2x)]\,dx =$

$= \frac{1}{2}\int(\sin 4x - \sin 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x\right) + C =$

$= \frac{1}{8}(2\cos 2x - \cos 4x) + C.$

3. Найти $\int \sin 4x\sin 3x\,dx$.

Решение. $\int \sin 4x\sin 3x\,dx = \frac{1}{2}\int(-\cos 7x + \cos x)\,dx =$

$= \frac{1}{2}\left(\sin x - \frac{1}{7}\sin 7x\right) + C = \frac{1}{14}(7\sin x - \sin 7x) + C.$

Если $m = n$, то формулы (13) примут вид

$$\begin{aligned} &\sin mx\cos mx = \frac{1}{2}\sin 2mx, \\ &\cos^2 mx = \frac{1}{2}(1 + \cos 2mx), \\ &\sin^2 mx = \frac{1}{2}(1 - \cos 2mx). \end{aligned} \qquad (15)$$

Пример 4. Найти $\int \cos^2 x\,dx$.

Решение. $\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int(1 + \cos 2x)\,dx =$

$= \frac{1}{2}\left(\int dx + \int \cos 2x\,dx\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C.$

2. *Функции вида* $\sin^m x\cos^n x$, *где хотя бы одно из чисел* m, n — *натуральное нечетное число.* Пусть для определенности $n = 2p + 1$, m — любое действительное число. Тогда $\sin^m x\cos^n x\,dx = \sin^m x\cos^{2p} x\cos x\,dx = \sin^m x(1 - \sin^2 x)^p d(\sin x) = u^m(1 - u^2)^p du$, где $u = \sin x$. Здесь p — натуральное число и можно применить ме-

тод разложения. Если же $m=2p+1$, n — любое действительное число, то подстановка $u=\cos x$ приводит к аналогичному результату (проверьте).

Примеры. 5. Найти $\int \sin^2 x \cos^5 x \, dx$.

Решение. Положим $u=\sin x$; тогда $du=\cos x \, dx$; следовательно,

$$\int \sin^2 x \cos^5 x \, dx = \int u^2 (1-u^2)^2 \, du =$$

$$= \int (u^2 - 2u^4 + u^6) \, du = \frac{1}{3} u^3 - \frac{2}{5} u^5 + \frac{1}{7} u^7 + C =$$

$$= \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{2}{5} \sin^5 x + \frac{1}{7} \sin^7 x + C.$$

6. Найти $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} \, dx$.

Решение. Положим $u=\cos x$, тогда $du=-\sin x \, dx$. Значит,

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} \, dx = -\int u^{-2} (1-u^2) \, du = \int (1-u^{-2}) \, du =$$

$$= u + \frac{1}{u} + C = \cos x + \frac{1}{\cos x} + C.$$

7. Найти $\int \sqrt{\cos x} \sin^3 x \, dx$.

Решение. $\int \sqrt{\cos x} \sin^3 x \, dx = -\int \sqrt{\cos x} (1-\cos^2 x) d(\cos x) =$
$= -\int (\cos x)^{1/2} d(\cos x) + \int (\cos x)^{5/2} d(\cos x) = -\frac{2}{3} (\cos x)^{3/2} +$
$+ \frac{2}{7} (\cos x)^{7/2} + C = \frac{2}{21} (\cos x)^{3/2} (3\cos^2 x - 7) + C.$

3. *Функции вида* $\sin^m x \cos^n x$, *где* m *и* n *— натуральные четные числа.* Интегралы от этих функций с помощью формул (15) и (13) сводятся к интегралам, рассмотренным в пп. 1 и 2.

Пример 8. Найти $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$.

Решение. $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx =$

$$= \int \frac{1}{2} (1-\cos 2x) \left[\frac{1}{2} (1+\cos 2x)\right]^2 dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int (\sin^2 2x + \sin^2 2x \cos 2x) \, dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int \left[\frac{1}{2} (1-\cos 4x) + \sin^2 2x \cos 2x\right] dx =$$

$$= \frac{1}{16} \int (1 - \cos 4x + 2\sin^2 2x \cos 2x) \, dx =$$

$$=\frac{1}{16}\left[x-\frac{1}{4}\sin 4x+\int \sin^2 2x\,\mathrm{d}(\sin 2x)\right]=$$
$$=\frac{1}{16}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{1}{3}\sin^3 2x\right)+C.$$

7°. Упражнения

Найдите неопределенные интегралы:

1. $\int \sin\frac{x}{5}\,\mathrm{d}x.$
2. $\int \sqrt[3]{1-3x^3}\,x^2\,\mathrm{d}x.$
3. $\int \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x.$
4. $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{e^{x^3}}.$
5. $\int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{1+2\cos x}.$
6. $\int \operatorname{ctg} x\,\mathrm{d}x.$
7. $\int \left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2\mathrm{d}x.$
8. $\int e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{\cos^2 x)}\right)\mathrm{d}x.$
9. $\int \operatorname{ctg}^2 x\,\mathrm{d}x.$
10. $\int \frac{\operatorname{tg}(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x.$
11. $\int \frac{(3x+2)\,\mathrm{d}x}{x^2-4x+13}.$
12. $\int \frac{(x+5)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{7+6x-x^2}}.$
13. $\int \frac{(x+3)\,\mathrm{d}x}{x^2-8x+7}.$
14. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+10x+24}}.$
15. $\int x^2\ln x\,\mathrm{d}x.$
16. $\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x.$
17. $\int \arcsin x\,\mathrm{d}x.$
18. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$
19. $\int x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x.$
20. $\int e^x\sin 5x\,\mathrm{d}x.$
21. $\int \cos x\cos 4x\,\mathrm{d}x.$
22. $\int \sin 2x\cos 2x\,\mathrm{d}x.$
23. $\int \sin^2 3x\,\mathrm{d}x.$
24. $\int \frac{\cos^5 x}{\sqrt[3]{\sin x}}\,\mathrm{d}x.$
25. $\int \sin^2 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x.$
26. $\int \sin 2x\sin^3 x\cos x\,\mathrm{d}x.$

§ 1.3. Интегрирование рациональных функций

1°. Рациональные функции. Существует один очень важный класс элементарных функций, интегрируемых в элементарных функциях,— это *рациональные функции*

$$f(x)=Q_m(x)/P_n(x), \tag{1}$$

где $Q_m(x)$ и $P_n(x)$ — многочлены соответственно m-й и n-й степени, т. е.

$$Q_m(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0 \quad (b_m\neq 0),$$

$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0 \quad (a_n\neq 0).$$

Здесь m и n — натуральные числа или нуль, а b_i и a_j — действительные числа. Выражение (1) будем также называть *рациональной дробью*. Если $m<n$, то рациональная дробь называется *правильной*; если $m\geqslant n$ — *неправильной*; если $n=0$, то выражение (1) является *многочленом* (степени m).

Например: $\frac{x+5}{x^3+3x-4}$, $\frac{3}{x+2}$ — правильные дроби;

$\frac{x^4-3x^3+3x^2-13x+12}{x^3+3x-4}$, $\frac{x}{x+2}$ — неправильные дроби;

x^5+4x^3-x+1, $x+3$ — многочлены.

Многочлен называют также *целой рациональной функцией*.

Приведем без доказательства ряд теорем из алгебры, которые будут использованы в дальнейшем.

Теорема 1. *Если даны два многочлена $Q_m(x)$ и $P_n(x)$ ($m\geqslant n$), то многочлен $Q_m(x)$ всегда может быть представлен в виде*

$$Q_m(x)=D_{m-n}(x)\cdot P_n(x)+R_{m_1}(x), \qquad (2)$$

где $D_{m-n}(x)$ и $R_{m_1}(x)$ — многочлены, причем $m_1<n$.

Практически многочлен $D_{m-n}(x)$ получается в результате обычного деления $Q_m(x)$ на $P_n(x)$; многочлен $R_{m_1}(x)$ — остаток, получающийся при этом делении.

Например,

$$x^4-3x^3+3x^2-10x+16=(x-3)(x^3+3x-4)+(3x+4).$$

Теорема 2. *Любой многочлен*

$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0 \quad (a_n\neq 0)$$

может быть представлен в виде

$$P_n(x)=a_n(x-c_1)^{s_1}\ldots(x-c_k)^{s_k}(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}\ldots(x^2+p_lx+q_l)^{t_l}, \qquad (3)$$

где $s_1+\ldots+s_k+2(t_1+\ldots+t_l)=n$, *а* $p_j^2-4q_j<0$ $(j=1, 2,\ldots, l)$.

Здесь c_r — действительные, имеющие кратность s_r, а $z_{j(1,2)}=\alpha_j\pm\pm\beta_j i$ $\left(\alpha_j=-\frac{p_j}{2},\ \beta_j=\frac{1}{2}\sqrt{4q_j-p_j^2}\right)$ — попарно сопряженные комплексные корни уравнения $P_n(x)=0$, имеющие кратность t_j.

Например: $x^3+3x-4=(x-1)(x^2+x+4)$;

$$x^4+1=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1);$$

$$2x^3-7x^2+4x+4=2(x-2)^2(x+0{,}5).$$

Для представления $P_n(x)$ в виде (3) теоретически надо найти все корни уравнения $P_n(x)=0$. В общем случае эта задача довольно трудная. В дальнейшем мы ограничимся простейшими случаями, когда разложение многочлена $P_n(x)$ либо уже задано, либо не представляет особых трудностей.

Рациональные дроби

$$\begin{array}{ll} \text{I. } \dfrac{1}{x-a}; & \text{II. } \dfrac{1}{(x-a)^s}; \\[2ex] \text{III. } \dfrac{2x+p}{x^2+px+q}; & \text{IV. } \dfrac{2x+p}{(x^2+px+q)^s}; \\[2ex] \text{V. } \dfrac{1}{x^2+px+q}; & \text{VI. } \dfrac{1}{(x^2+px+q)^s}, \end{array} \tag{4}$$

где натуральное число $s\geqslant 2$, $p^2-4q<0$, называются *простейшими дробями*; условие $p^2-4q<0$ означает, что многочлен x^2+px+q нельзя разложить на линейные множители. В простейших дробях III и IV числитель является производной от квадратного трехчлена x^2+px+q, стоящего в знаменателе.

Заметим, что обычно простейшими называются дроби вида $\dfrac{A}{x-a}$, $\dfrac{A}{(x-a)^s}$, $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^s}$, где A и B — неопределенные коэффициенты. Однако в дальнейшем при интегрировании дробь $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$ сводят к дробям III и V, а дробь $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^s}$ — к дробям IV и VI. Вопрос о составе группы простейших дробей носит условный характер, а с точки зрения техники интегрирования удобнее считать простейшими дроби вида (4).

Так как простейшие дроби являются правильными дробями, то и их любая линейная комбинация после сложения по обычным правилам алгебры приведет к правильной дроби.

Теорема 3. *Любую правильную рациональную дробь со знаменателем $P_n(x)$ ($a_n=1$) можно единственным образом представить в виде линейной комбинации n простейших дробей вида* (4).

Практически представление правильной дроби $Q_m(x)/P_n(x)$ ($a_n=1$) в виде линейной комбинации простейших дробей производят по следующей схеме:

а) знаменатель $P_n(x)$ данной дроби раскладывают на множители, т. е. приводят к виду (3);

б) записывают линейную комбинацию простейших дробей с неопределенными коэффициентами $A_1, A_2, \ldots, A_n$, включая в нее для каждого множителя из разложения (3) вида $(x-a)^s$ простейшие дроби $\dfrac{1}{x-a}$, $\dfrac{1}{(x-a)^2}$, ..., $\dfrac{1}{(x-a)^s}$, а для каждого множителя $(x^2+px+q)^t$ — простейшие дроби $\dfrac{2x+p}{x^2+px+q}$, $\dfrac{2x+p}{(x^2+px+q)^2}$, ...,

$$\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^l},\ \frac{1}{x^2+px+q},\ \frac{1}{(x^2+px+q)^2},\ldots,\frac{1}{(x^2+px+q)^l};$$

в) приводят эту линейную комбинацию по обычным алгебраическим правилам сложения дробей к одной дроби со знаменателем $P_n(x)$ и числителем в виде многочлена степени $n-1$, коэффициенты которого выражаются линейно через неопределенные коэффициенты $A_1, A_2, \ldots, A_n$; эта дробь тождественна данной дроби $Q_m(x)/P_n(x)$, а так как их знаменатели одинаковы, то тождественны и их числители;

г) составляют систему n линейных уравнений для $A_1, A_2, \ldots, A_n$, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x многочлена в числителе дроби, полученной в п. в), и $Q_m(x)$; при этом считают, что многочлен $Q_m(x)$ содержит и члены с $x^{m+1}, x^{m+2}, \ldots, x^{n-1}$, но с коэффициентами, равными нулю; решив полученную систему линейных уравнений относительно $A_1, A_2, \ldots, A_n$, находят эти неопределенные коэффициенты;

д) записывают искомое представление дроби $Q_m(x)/P_n(x)$ в виде линейной комбинации простейших дробей.

Пример. Разложить на сумму простейших дробей рациональные дроби:

$$1)\ \frac{x^2-3}{x^3-2x^2-x+2};\qquad 2)\ \frac{3x+4}{x^3+x^2-2};$$

$$3)\ \frac{8x^3-10x^2-30x+19}{(x-2)^2(x^2+4x+5)};\qquad 4)\ \frac{2x^3-18x+1}{(x^2+4x+5)^2}.$$

Решение. 1) а) $x^3-2x^2-x+2=x(x^2-1)-2(x^2-1)=$
$=(x+1)(x-1)(x-2)$;

б) $\dfrac{x^2-3}{(x+1)(x-1)(x-2)}=\dfrac{A_1}{x+1}+\dfrac{A_2}{x-1}+\dfrac{A_3}{x-2}$;

в) $A_1(x-1)(x-2)+A_2(x+1)(x-2)+A_3(x+1)(x-1)\equiv x^2-3$,

$(A_1+A_2+A_3)x^2+(-3A_1-A_2)x+(2A_1-2A_2-A_3)\equiv x^2-3$;

г) приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x: $A_1+A_2+A_3=1$, $-3A_1-A_2=0$, $2A_1-2A_2-A_3=-3$; из полученной системы линейных уравнений находим $A_1=-1/3$, $A_2=1$, $A_3=1/3$;

д) $\dfrac{x^2-3}{x^3-2x^2-x+2}=-\dfrac{1}{3(x+1)}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{3(x-2)}$.

Рекомендуем проверить правильность разложения, сложив дроби в правой части равенства.

2) а) $x^3+x^2-2=(x^3-1)+(x^2-1)=(x-1)(x^2+2x+2)$, здесь x^2+2x+2 на линейные множители не раскладывается, так как $p^2-4q=2^2-4\cdot 2=-4<0$;

б) $\dfrac{3x+4}{(x-1)(x^2+2x+2)}=\dfrac{A_1}{x-1}+\dfrac{A_2(2x+2)}{x^2+2x+2}+\dfrac{A_3}{x^2+2x+2}$;

в) $A_1(x^2+2x+2)+A_2(2x+2)(x-1)+A_3(x-1)\equiv 3x+4,$

$(A_1+2A_2)x^2+(2A_1+A_3)x+(2A_1-2A_2-A_3)\equiv 3x+4;$

г) $\begin{cases} A_1+2A_2 = 0, \\ 2A_1+A_3 = 3, \\ 2A_1-2A_2-A_3=4; \end{cases}$ $A_1=\frac{7}{5},\quad A_2=-\frac{7}{10},\quad A_3=\frac{1}{5};$

д) $\frac{3x+4}{x^3+x^2-2}=\frac{7}{5(x-1)}-\frac{7(2x+2)}{10(x^2+2x+2)}+\frac{1}{5(x^2+2x+2)}.$

3) Здесь п. а) отпадает, поскольку знаменатель уже разложен на множители.

б) $\frac{8x^3-10x^2-30x+19}{(x-2)^2(x^2+4x+5)}=\frac{A_1}{x-2}+\frac{A_2}{(x-2)^2}+\frac{A_3(2x+4)}{x^2+4x+5}+\frac{A_4}{x^2+4x+5};$

в) $A_1(x-2)(x^2+4x+5)+A_2(x^2+4x+5)+A_3(2x+4)(x-2)^2+$
$+A_4(x-2)^2\equiv 8x^3-10x^2-30x+19;$

$(A_1+2A_3)x^3+(2A_1+A_2-4A_3+A_4)x^2+(-3A_1+4A_2-8A_3-4A_4)x+$
$+(-10A_1+5A_2+16A_3+4A_3)\equiv 8x^3-10x^2-30x+19;$

г) $\begin{cases} A_1+2A_3=8, \\ 2A_1+A_2-4A_3+A_4=-10, \\ -3A_1+4A_2-8A_3-4A_4=-30, \\ -10A_1+5A_2+16A_3+4A_4=19; \end{cases}$ $A_1=2,\ A_2=-1,\ A_3=3,\ A_4=-1;$

д) $\frac{8x^3-10x^2-30x+19}{(x-2)^2(x^2+4x+5)}=\frac{2}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{3(2x+4)}{x^2+4x+5}-$
$-\frac{1}{x^2+4x+5}.$

4) б) $\frac{2x^3-18x+1}{(x^2+4x+5)^2}=\frac{A_1(2x+4)}{x^2+4x+5}+\frac{A_2(2x+4)}{(x^2+4x+5)^2}+$
$+\frac{A_3}{x^2+4x+5}+\frac{A_4}{(x^2+4x+5)^2};$

в) $A_1(2x+4)(x^2+4x+5)+A_2(2x+4)+A_3(x^2+4x+5)+A_4\equiv$
$\equiv 2x^3-18x+1,$

$2A_1x^3+(12A_1+A_3)x^2+(26A_1+2A_2+4A_3)x+$
$+(20A_1+4A_2+5A_3+A_4)\equiv 2x^3-18x+1;$

г) $\begin{cases} 2A_1=2, \\ 12A_1+A_3=0, \\ 26A_1+2A_2+4A_3=-18, \\ 20A_1+4A_2+5A_3+A_4=1; \end{cases}$ $A_1=1,\ A_2=2,\ A_3=-12,\ A_4=33;$

д) $\frac{2x^3-18x+1}{(x^2+4x+5)^2}=\frac{2x+4}{x^2+4x+5}+\frac{2(2x+4)}{(x^2+4x+5)^2}-\frac{12}{x^2+4x+5}+$
$+\frac{33}{(x^2+4x+5)^2}.$

Составляя в соответствии с п. г) приведенной выше схемы систему уравнений для $A_1, A_2, \ldots, A_n$, мы опирались на известный из алгебры факт: два многочлена одной и той же степени тождественно равны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты при одинаковых степенях x. Практически можно использовать и другой критерий: два многочлена степени $n-1$ тождественно равны, если равны их значения при n различных значениях аргумента.

Пользуясь последним критерием, можно также получить систему линейных уравнений для $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Это особенно удобно, когда в разложение $P_n(x)$ входят только множители вида $(x-a)$ в первых степенях. Так, в примере 1 мы нашли, что

$$A_1(x-1)(x-2)+A_2(x+1)(x-2)+A_3(x+1)(x-1)\equiv x^2-3.$$

Здесь $n=3$; имеет место тождество двух многочленов второй степени. Теперь, не преобразовывая левую часть тождества, подставим в него три значения x; наиболее удобно использовать значения $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=2$ — корни знаменателя $(x+1)(x-1)(x-2)$. Получаем:

$$\begin{aligned} &x_1=-1; \quad && 6A_1=-2, \quad && A_1=-1/3;\\ &x_2=1; && -2A_2=-2, && A_2=1;\\ &x_3=2; && 3A_3=1, && A_3=1/3. \end{aligned}$$

Теорема 4. *Любую рациональную дробь можно представить в виде линейной комбинации многочлена и простейших дробей.*

Доказательство. Пусть дана рациональная дробь $Q_m(x)/P_n(x)$. Не нарушая общности, можно считать знаменатель $P_n(x)$ этой дроби приведенным многочленом ($a_n=1$). В противном случае, разделив числитель и знаменатель на a_n ($a_n\neq 0$), в знаменателе получим приведенный многочлен.

Если $m\geqslant n$ (дробь неправильная), то на основании теоремы 1 ее можно представить в виде

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=D_{m-n}(x)+\frac{R_{m_1}(x)}{P_n(x)}, \tag{5}$$

где $D_{m-n}(x)$ — многочлен степени $m-n$, а $R_{m_1}(x)/P_n(x)$ — правильная дробь. В силу теоремы 3, правильную дробь можно представить в виде линейной комбинации простейших дробей.

Если же $m<n$ (дробь правильная), то теорема 4 сводится к теореме 3 (в этом случае многочлен входит в линейную комбинацию с коэффициентом нуль).

2°. Интегрирование рациональных функций. Теорема 5. *Неопределенный интеграл от любой рациональной функции выражается в элементарных функциях, а именно — через рациональные функции, логарифмы и арктангенсы.*

Доказательство. Многочлен является линейной комбинацией степенных функций. Поэтому неопределенный интеграл от многочлена n-й степени есть многочлен $(n+1)$-й степени.

Неопределенные интегралы от всех простейших дробей также выражаются в элементарных функциях. При этом интегралы от простейших дробей I—V легко находятся непосредственно:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x-a} = \ln|x-a| + C; \tag{6}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^s} = \frac{1}{(1-s)(x-a)^{s-1}} + C \quad (s \geqslant 2); \tag{7}$$

$$\int \frac{(2x+p)\,\mathrm{d}x}{x^2+px+q} = \ln(x^2+px+q) + C \ (p^2-4q<0); \tag{8}$$

здесь $x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{1}{4}(p^2-4q)>0$ и поэтому знак модуля под знаком логарифма можно опустить;

$$\int \frac{(2x+p)\,\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^s} = \frac{1}{(1-s)(x^2+px+q)^{s-1}} + C\,(s \geqslant 2,\ p^2-4q<0); \tag{9}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+px+q} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C \quad (p^2-4q<0). \tag{10}$$

Интегрирование простейшей дроби VI, т. е. дроби $\frac{1}{(x^2+px+q)^s}$ $(s\geqslant 2,\ p^2-4q<0)$, приводит к бо́льшим трудностям по сравнению с интегрированием дробей I—V. Обозначив $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^k}=I_k$, найдем выражение I_k в виде

$$I_k = r(x) + \lambda I_{k-1}, \tag{11}$$

где $r(x)$ — рациональная функция от x, λ — постоянная. Формула (11) позволяет выразить $I_k=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^k}$ через $I_{k-1}=$ $=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^{k-1}}$, т. е. понизить на единицу степень знаменателя в подынтегральном выражении; формулы такого типа называются *рекуррентными*. Для упрощения записей при выводе формулы (11) обозначим $4q-p^2=4a^2$ (так как $p^2-4q<0$, то $4q-p^2>0$) и произведем в интеграле I_k замену переменной, положив $x+p/2=t$; тогда $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$, $x^2+px+q=(x+p/2)^2+(1/4)(4q-p^2)=$ $=t^2+a^2$, $I_k=\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^k}$. К интегралу $I_{k-1}=\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^{k-1}}$ применим интегрирование по частям, положив $u=(t^2+a^2)^{1-k}$, $\mathrm{d}v=\mathrm{d}t$; тогда $v=t$, $\mathrm{d}u=(1-k)(t^2+a^2)^{-k}\cdot 2t\,\mathrm{d}t$ и, значит,

$$\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}} = t(t^2+a^2)^{1-k} - 2(1-k)\int t^2(t^2+a^2)^{-k}\,dt =$$

$$= t(t^2+a^2)^{1-k} - 2(1-k)\int (t^2+a^2-a^2)(t^2+a^2)^{-k}\,dt =$$

$$= t(t^2+a^2)^{1-k} - 2(1-k)\int (t^2+a^2)^{1-k}\,dt + 2(1-k)a^2\int (t^2+a^2)^{-k}\,dt$$

или

$$I_{k-1} = t(t^2+a^2)^{1-k} - 2(1-k)I_{k-1} + 2(1-k)a^2 I_k,$$

$$(3-2k)I_{k-1} = t(t^2+a^2)^{1-k} + 2(1-k)a^2 I_k,$$

откуда

$$I_k = \frac{t}{2(k-1)a^2(t^2+a^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)a^2} I_{k-1}.$$

Полученное выражение представляет собой формулу (11), где

$$r(x) = \frac{t}{2(k-1)a^2(t^2+a^2)^{k-1}} = \frac{2x+p}{(k-1)(4q-p^2)(x^2+px+q)^{k-1}},$$

$$\lambda = \frac{2k-3}{2(k-1)a^2} = \frac{2(2k-3)}{(k-1)(4q-p^2)}. \qquad (12)$$

Полагая последовательно $k=s$ $(s-1, \dots, 2)$, придем к выражению

$$I_s = R(x) + \mu I_1, \qquad (13)$$

где $R(x)$ — рациональная функция от x, μ — постоянная, а $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+px+q}$ — интеграл от простейшей дроби V, который выражается через арктангенс [см. формулу (10)].

Итак, многочлен и все простейшие дроби интегрируются в элементарных функциях, а отсюда в силу теоремы 4 следует справедливость и теоремы 5.

Пример. Найти интегралы:

1) $\int \frac{x^5+2x^3+2x^2+x+5}{x^2+1}dx$; 2) $\int \frac{(x^2-3)\,dx}{x^3-2x^2-x+2}$; 3) $\int \frac{(3x+4)\,dx}{x^3+x^2-2}$;

4) $\int \frac{8x^3-10x^2-30x+19}{(x-2)^2(x^2+4x+5)}dx$; 5) $\int \frac{2x^3-18x+1}{(x^2+4x+5)^2}dx$.

Решение. 1) Подынтегральная функция представляет собой неправильную дробь. Делением числителя на знаменатель выделим из нее целую часть:

$$\int \frac{x^5+2x^3+2x^2+x+5}{x^2+1}dx = \int \left(x^3+x+2+\frac{3}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3\,\mathrm{arctg}\,x + C.$$

Для нахождения интегралов 2)—5) воспользуемся результатами примера п. 1°:

$$2)\ \int \frac{(x^2-3)\,dx}{x^3-2x^2-x+2}=\int\left[-\frac{1}{3(x+1)}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{3(x-2)}\right]dx=$$

$$=-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\ln|x-1|+\frac{1}{3}\ln|x-2|+\frac{1}{3}\ln C=$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left[C\left|\frac{(x-2)(x-1)^3}{x+1}\right|\right];$$

$$3)\ \int\frac{(3x+4)\,dx}{x^3+x^2-2}=\int\left[\frac{7}{5(x-1)}-\frac{7(2x+2)}{10(x^2+2x+2)}+\frac{1}{5(x^2+2x+2)}\right]dx=$$

$$=\frac{7}{5}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{7}{10}\int\frac{d(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2}+\frac{1}{5}\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1}=$$

$$=\frac{7}{5}\ln|x-1|-\frac{7}{10}\ln(x^2+2x+2)+\frac{1}{5}\operatorname{arctg}(x+1)+C;$$

$$4)\ \int\frac{8x^3-10x^2-30x+19}{(x-2)^2(x^2+4x+5)}dx=\int\left[\frac{2}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{3(2x+4)}{x^2+4x+5}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{x^2+4x+5}\right]dx=2\int\frac{dx}{x-2}-\int\frac{dx}{(x-2)^2}+3\int\frac{d(x^2+4x+5)}{x^2+4x+5}-$$

$$-\int\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+1}=2\ln|x-2|+\frac{1}{x-2}+3\ln(x^2+4x+5)-$$

$$-\operatorname{arctg}(x+2)+C;$$

$$5)\ \int\frac{2x^3-18x+1}{(x^2+4x+5)^2}dx=\int\left[\frac{2x+4}{x^2+4x+5}+\frac{2(2x+4)}{(x^2+4x+5)^2}-\frac{12}{x^2+4x+5}+\right.$$

$$\left.+\frac{33}{(x^2+4x+5)^2}\right]dx=\int\frac{d(x^2+4x+5)}{x^2+4x+5}+2\int\frac{d(x^2+4x+5)}{(x^2+4x+5)^2}-$$

$$-12\int\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+1}+33\int\frac{dx}{(x^2+4x+5)^2}=\ln(x^2+4x+5)-$$

$$-\frac{2}{x^2+4x+5}-12\operatorname{arctg}(x+2)+33\int\frac{dx}{(x^2+4x+5)^2}.$$

К последнему интегралу применим формулы (11) и (12):

$$\int\frac{dx}{(x^2+4x+5)^2}=\frac{2x+4}{4(x^2+4x+5)}+\frac{2}{4}\int\frac{dx}{x^2+4x+5}=$$

$$=\frac{x+2}{2(x^2+4x+5)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+2).$$

Окончательно имеем

$$\int \frac{2x^3-18x+1}{(x^2+4x+5)^2}\,dx = \ln(x^2+4x+5)+\frac{33x+62}{2(x^2+4x+5)}+$$
$$+\frac{9}{2}\operatorname{arctg}(x+2)+C.$$

3°. Упражнения

Найдите неопределенные интегралы:

1. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$.
2. $\int \frac{(x-1)\,dx}{x^2+6x+8}$.
3. $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$.
4. $\int \frac{(3x+2)\,dx}{x(x+1)^3}$.
5. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$.
6. $\int \frac{dx}{x^5-x^3+x^2-1}$.
7. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2-2x+5)}$.
8. $\int \frac{(x^3-2x-8)\,dx}{x^2(x-1)(x^2+4x+8)}$.
9. $\int \frac{x\,dx}{(x^2+2x+2)^2}$.
10. $\int \frac{(3x+2)\,dx}{(x^2-3x+3)^2}$.

§ 1.4. Метод рационализации. Интегрирование некоторых иррациональных и тригонометрических функций

1°. Понятие о методе рационализации. Если для интеграла $\int f(x)\,dx$, где подынтегральная функция $f(x)$ не является рациональной, можно указать такую подстановку, которая приводит его к виду $\int g(t)\,dt$, где $g(t)$ — рациональная функция, то последний интеграл, а значит, и интеграл $\int f(x)\,dx$, выражается в элементарных функциях. Применение такой подстановки для взятия интеграла $\int f(x)\,dx$ называют *методом рационализации*.

Например, в интеграле $\int \frac{2e^{2x}+\sqrt{e^x}}{e^x-1}\,dx$ подынтегральная функция не является рациональной. Произведем подстановку $t=\sqrt{e^x}$, откуда $e^x=t^2$, $x=2\ln t, dx=\frac{2dt}{t}$. Тогда получим $\int \frac{2e^{2x}+\sqrt{e^x}}{e^x-1}\,dx = 2\int \frac{2t^3+1}{t^2-1}\,dt$, т. е. данный интеграл преобразован в интеграл от рациональной функции.

Для обозначения рациональных функций будем использовать буквы R и r [например, $R(x)$, $r(x)$].

Ранее были рассмотрены рациональные функции одного аргумента x. Теперь, наряду с такими функциями, рассмотрим рациональные функции двух, трех и большего числа переменных, т. е. функции, над аргументами которых производятся только арифметические операции. Рациональная функция всегда может быть приведена к виду отношения многочленов от ее аргументов. Например, $R(u, v)=\frac{3u^2v-2uv+u+1}{4u^2+5v^2+u-v+3}$ — рациональная функция двух аргументов u и v; $f(x, y)=\sqrt{xy}+\ln x+\cos y+1$ — не рациональная функция аргументов x и y.

Заметим, что если $R(u, v)$ — рациональная функция, а u и v в свою очередь — рациональные функции от t [$u=r_1(t)$, $v=r_2(t)$], то получается сложная рациональная функция $R(u, v)=R(r_1(t), r_2(t))=R_1(t)$, т. е. рациональная функция от рациональных функций также рациональна. В частности, сумма, разность, произведение и частное рациональных функций являются функциями рациональными.

Данная функция может не быть рациональной относительно ее аргументов, но заменой переменных ее иногда можно привести к рациональному виду относительно новых переменных. Например, функция $f(x, y)=\sqrt{xy}+x^2+y+1$ не является рациональной; если положить $y=\frac{t^2}{x}$, то получим $f(x, y)=t+x^2+\frac{t^2}{x}+1=$ $=\frac{x^3+t^2+xt+x}{x}=R(x, t)$.

Пусть функция $f(x)$ такова, что ее можно представить в виде $f(x)=R(u, v, \ldots)$, где

$$u=r_1(t), \quad v=r_2(t), \ldots, \tag{1}$$

а $t=\psi(x)$ и $x=\varphi(t)$ — взаимно обратные непрерывные функции, имеющие непрерывные производные в соответствующих интервалах изменения x и t, причем

$$\frac{dx}{dt}=\varphi'(t)=r(t), \quad dx=r(t)\,dt. \tag{2}$$

Тогда неопределенный интеграл $\int f(x)\,dx$ с помощью подстановки $x=\varphi(t)$ преобразуется в интеграл от рациональной функции, т. е. может быть найден методом рационализации.

Действительно, в силу формул (1) и (2) имеем $f(x)\,dx=R(r_1(t), r_2(t), \ldots)\,r(t)\,dt=R_1(t)\,dt$, т. е. $\int f(x)\,dx=\int R_1(t)\,dt$.

2°. Применение метода рационализации к интегрированию некоторых функций

1. *Функция вида $f(x)=R(u)$, где $u=e^x$*. Положим $t=e^x$; тогда $x=\ln t$, $u=t=r_1(t)$, $dx=\frac{dt}{t}=r(t)\,dt$. Условия (1) и (2) выполнены; следовательно, $\int R(e^x)\,dx=\int R(t)\frac{dt}{t}=\int R_1(t)\,dt$.

Пример 1. Найти $I=\int\frac{e^{3x}dx}{e^x+2}$.

Решение. Полагая $e^x=t$, получим $x=\ln t, dx=\frac{dt}{t}$, $\frac{e^{3x}dx}{e^x+2}=\frac{t^2\,dt}{t+2}$. Значит,

$$I=\int\frac{t^2\,dt}{t+2}=\int\left(t-2+\frac{4}{t+2}\right)dt=\frac{1}{2}t^2-2t+4\ln(t+2)+C=$$
$$=\frac{1}{2}e^{2x}-2e^x+4\ln(e^x+2)+C.$$

2. *Функция вида $f(x)=R(u)$, где $u=\operatorname{tg}x$*. Положим $t=\operatorname{tg}x$; тогда $x=\operatorname{arctg}t$, $u=t=r_1(t)$, $dx=\frac{dt}{1+t^2}=r(t)\,dt$. Условия (1) и (2) выполнены; следовательно, $\int R(\operatorname{tg}x)\,dx=\int\frac{R(t)}{1+t^2}\,dt=\int R_1(t)\,dt$.

Пример 2. Найти $I=\int\operatorname{tg}^3x\,dx$.

Решение. Полагая $\operatorname{tg}x=t$, находим $x=\operatorname{arctg}t$, $dx=\frac{dt}{1+t^2}$, $\operatorname{tg}^3x\,dx=\frac{t^3dt}{1+t^2}$. Поэтому

$$I=\int\frac{t^3\,dt}{1+t^2}=\int\left(t-\frac{t}{1+t^2}\right)dt=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)+C=$$
$$=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2x-\frac{1}{2}\ln(1+\operatorname{tg}^2x)+C=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2x+\ln|\cos x|+C.$$

3. *Функция вида $f(x)=R(u, v)$, где $u=\cos^2x$, $v=\sin^2x$*. Положим $t=\operatorname{tg}x$; тогда $x=\operatorname{arctg}t$, $u=\cos^2x=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2x}=\frac{1}{1+t^2}=r_1(t)$, $v=\sin^2x=\frac{\operatorname{tg}^2x}{1+\operatorname{tg}^2x}=\frac{t^2}{1+t^2}=r_2(t)$, $dx=\frac{dt}{1+t^2}=r(t)\,dt$. Условия (1) и (2) выполнены; следовательно, $\int R(\cos^2x,\ \sin^2x)\,dx=\int R(r_1(t), r_2(t))\,r(t)\,dt=\int R_1(t)\,dt$.

Пример 3. Найти $I=\int\frac{dx}{\cos^2x+4\sin^2x}$.

Решение. Полагая $\operatorname{tg} x = t$, имеем $x = \operatorname{arctg} t$, $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$, $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$, $\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x + 4\sin^2 x} = \frac{\mathrm{d}t}{1+4t^2}$. Таким образом,

$$I = \int \frac{\mathrm{d}t}{1+4t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(2t)}{1+(2t)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2t) + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg} x) + C.$$

Практически здесь можно провести преобразования проще:

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+4\operatorname{tg}^2 x)\cos^2 x} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(2\operatorname{tg} x)}{1+(2\operatorname{tg} x)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg} x) + C.$$

4. *Функция вида $f(x) = R(u, v)$, где $u = \sin x$, $v = \cos x$.* Положим $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$; тогда $x = 2\operatorname{arctg} t$, $u = \sin x = \frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2} = r_1(t)$, $v = \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2} = r_2(t)$, $\mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2} = r(t)\,\mathrm{d}t$. Условия (1) и (2) выполнены; следовательно, $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x = \int R(r_1(t), r_2(t))\, r(t)\,\mathrm{d}t = \int R_1(t)\,\mathrm{d}t$.

Пример 4. Найти $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x + \sin 2x}$.

Решение. Имеем $\frac{1}{2\sin x + \sin 2x} = \frac{1}{2\sin x(1+\cos x)}$. Полагая $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, получим $x = 2\operatorname{arctg} t$, $\mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\frac{\mathrm{d}x}{2\sin x(1+\cos x)} = \frac{t^2+1}{4t}\,\mathrm{d}t$. Поэтому

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{t^2+1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int\left(t + \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}t^2 + \ln|t|\right) + C =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 2\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|\right) + C.$$

5. *Функция вида $f(x) = R(x, u_1, u_2, \ldots, u_n)$, где $u_i = x^{p_i/q_i}$; p_i, q_i — натуральные числа* $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Найдем общий знаменатель q дробей p_1/q_1, p_2/q_2, ..., p_n/q_n (q — наименьшее общее кратное чисел q_1, q_2, ..., q_n). Тогда $p_i/q_i = s_i/q$, где q и s_i — натуральные числа $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Положим $t = x^{1/q}$, $x = t^q$. Тогда $x = t^q = r_0(t)$, $x_i = x^{p_i/q_i} = x^{s_i/q} = t^{s_i} = r_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $\mathrm{d}x = qt^{q-1}\mathrm{d}t = r(t)\,\mathrm{d}t$. Условия (1) и (2) выполнены; следовательно, интеграл $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ рационализируется.

Пример 5. Найти $I=\int \frac{\sqrt{x}-1}{x+\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

Решение. Подынтегральная функция $f(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{x+\sqrt[3]{x^2}}=$ $=R(x, x^{1/2}, x^{2/3})$. Показатели степеней — рациональные дроби 1/2, 2/3; их общий знаменатель равен 6. Произведем подстановку $t=x^{1/6}$ или $x=t^6$, $dx=6t^5dt$. Подынтегральное выражение преобразуется к виду

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x+\sqrt[3]{x^2}}\,dx=\frac{t^3-1}{t^6+t^4}\cdot 6t^5\,dt=\frac{6(t^4-t)}{t^2+1}\,dt.$$

Данный интеграл приведен к интегралу от рациональной функции. Имеем

$$I=6\int\frac{t^4-t}{t^2+1}\,dt=6\int\left(t^2-1-\frac{t-1}{t^2+1}\right)dt=$$
$$=6\left(\int t^2\,dt-\int dt-\int\frac{t\,dt}{t^2+1}+\int\frac{dt}{t^2+1}\right)=$$
$$=2t^3-6t-3\ln(t^2+1)+6\,\mathrm{arctg}\,t+C.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$I=2\sqrt{x}-6\sqrt[6]{x}-3\ln(1+\sqrt[3]{x})+6\,\mathrm{arctg}\sqrt[6]{x}+C.$$

6. *Функция вида* $f(x)=R(x, u_1, u_2, \ldots, u_n)$, *где* $u_i=\left(\frac{ax+b}{cx+h}\right)^{p_i/q_i}$; a, b, c, h — *постоянные числа*, $ah-bc\neq 0$; p_i, q_i — *натуральные числа* $(i=1, 2, \ldots, n)$. Такая функция называется *дробно-линейной иррациональностью*. Условие $ah-bc\neq 0$ обеспечивает то, что u_i не сводятся к постоянным. Действительно, если $ah-bc=0$, то $a/c=$ $=b/h$. Обозначим $a/c=b/h=k$; тогда $a=kc$, $b=kh$, $\frac{ax+b}{cx+h}=$ $=\frac{kcx+kh}{cx+h}=k=\mathrm{const}$, $u_i=k^{p_i/q_i}=\mathrm{const}$.

При $c=0$, $h=1$ получаем $u_i=(ax+b)^{p_i/q_i}$; в этом случае функция $R(x, u_1, u_2, \ldots, u_n)$ называется *линейной иррациональностью*. Функция, рассмотренная в предыдущем случае, является частным случаем линейной иррациональности при $b=0$, $a=1$.

Как и в п. 5, найдем общий знаменатель q дробей p_1/q_1, p_2/q_2, ..., p_n/q_n. Тогда $p_i/q_i=s_i/q$, где q и s_i — натуральные числа $(i=1, 2, \ldots, n)$. Положим $t=\left(\frac{ax+b}{cx+h}\right)^{1/q}$; тогда $\frac{ax+b}{cx+h}=t^q$, откуда $x=\frac{ht^q-b}{a-ct^q}=r_0(t)$ и $dx=\frac{(ah-bc)qt^{q-1}}{(a-ct^q)^2}\,dt=r(t)\,dt$. Кроме того,

$u_i=\left(\frac{ax+b}{cx+h}\right)^{s_i/q}=t^{s_i}=r_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Условия (1) и (2) выполнены; следовательно, $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ рационализируется.

Пример 6. Найти $I=\int\frac{1}{x^2-1}\left[\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}-\sqrt[6]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^5}\right]\mathrm{d}x$.

Решение. Здесь $u_1=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2/3}$, $u_2=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{5/6}$; показателями служат дроби 2/3 и 5/6, общий знаменатель которых равен 6. Произведем подстановку $t=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{1/6}$, откуда $\frac{x+1}{x-1}=t^6$, $x=\frac{t^6+1}{t^6-1}$, $\mathrm{d}x=\frac{-12t^5}{(t^6-1)^2}\mathrm{d}t$. Далее, находим $x^2-1=\frac{4t^6}{(t^6-1)^2}$ и преобразуем подынтегральное выражение:

$$\frac{1}{x^2-1}\left[\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}-\sqrt[6]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^5}\right]\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{(t^6-1)^2}{4t^6}(t^4-t^5)\frac{(-12t^5)}{(t^6-1)^2}\mathrm{d}t=3(t^4-t^3)\,\mathrm{d}t.$$

Таким образом,

$$I=3\int(t^4-t^3)\,\mathrm{d}t=\frac{3}{5}t^5-\frac{3}{4}t^4+C=$$

$$=\frac{3}{5}\sqrt[6]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^5}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}+C.$$

7. *Функция вида* $f(x)=R(x, u)$, *где* $u=\sqrt{ax^2+bx+c}$; a, b, c — *постоянные,* $a\neq0$ *и при* $a<0$ *дискриминант квадратного трехчлена* $D=b^2-4ac>0$. Такая функция называется *квадратичной иррациональностью.* Условие $a\neq0$ весьма существенно, так как в противном случае получается не квадратичная, а линейная иррациональность $u=\sqrt{bx+c}=(bx+c)^{1/2}$ (см. п. 6). Условие $D>0$ при $a<0$ также существенно, так как из выражения $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}\right]$ видно, что если $a<0$ и $D<0$, то $ax^2+bx+c<0$ при всех x, а если $a<0$ и $D=0$, то $ax^2+bx+c<0$ при всех x, кроме изолированной точки $x=-\frac{b}{2a}$, в которой $ax^2+bx+c=0$. Следовательно, если одновременно выполнены неравенства $a<0$ и $D\leqslant0$, то интеграл $\int R(x, u)\,\mathrm{d}x$ не имеет смысла. Во всех других случаях рассматриваемый интеграл имеет смысл. Его можно рационализировать, а значит, и найти с помощью *подстановок Эйлера:*

первая подстановка Эйлера применяется в случае $a>0$:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}\,x\pm t; \tag{3}$$

вторая подстановка Эйлера применяется в случае $D=b^2-4ac>$ >0:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=\pm t(x-\alpha)$$

или (4)

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=\pm t(x-\beta),$$

где α и β—действительные различные корни трехчлена ax^2+bx+c;

третья подстановка Эйлера применяется в случае $c>0$:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{c}\pm xt. \tag{5}$$

В правых частях равенств (3), (4) и (5) может быть выбрана любая комбинация знаков; в конкретных случаях надо выбирать их определенную комбинацию. Выбрав ту или иную подстановку Эйлера, возводят в квадрат обе части соответствующего равенства и после некоторых элементарных преобразований получают x, $u=\sqrt{ax^2+bx+c}$, а затем и производную $\dfrac{dx}{dt}$ как рациональные функции от t: $x=r_1(t)$, $u=r_2(t)$, $dx=r_1'(t)\,dt=r(t)\,dt$. Условия (1) и (2) выполнены; значит, $R(x,u)\,dx=R(r_1(t),\ r_2(t))\,r(t)\,dt=$ $=R_1(t)\,dt$, $\int R(x,u)\,dx=\int R_1(t)\,dt$.

После интегрирования нужно вернуться от переменной t к переменной x; выражение t через x легко получить из соответствующего равенства (3), (4) или (5).

Примеры. 7. Найти $I=\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$.

Решение. Здесь подынтегральная функция $f(x)=\dfrac{1}{xu}=R(x,u)$, где $u=\sqrt{x^2+x+1}$, $a=1>0$. Применим первую подстановку Эйлера (3): $\sqrt{x^2+x+1}=x+t$, $x^2+x+1=x^2+2tx+t^2$,

$$x=\frac{t^2-1}{1-2t},\quad u=x+t=\frac{-t^2+t-1}{1-2t},\quad dx=\frac{2(-t^2+t-1)}{(1-2t)^2}\,dt,$$

$\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}=\dfrac{2dt}{t^2-1}$; $t=\sqrt{x^2+x+1}-x$. Следовательно,

$$I=2\int\frac{dt}{t^2-1}=\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|+C=\ln\left|\frac{1+x-\sqrt{x^2+x+1}}{1-x+\sqrt{x^2+x+1}}\right|+C.$$

8. Найти $I=\displaystyle\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{-x^2+4x-3}}$.

Решение. Здесь $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)u}=R(x,u)$, где $u=\sqrt{-x^2+4x-3}$, $a=-1$, $b=4$, $c=-3$, $D=b^2-4ac=4>0$. Корнями трехчлена $-x^2+4x-3$ являются $\alpha=1$, $\beta=3$; $-x^2+4x-3=-(x-1)(x-3)$. Применим вторую подстановку Эйлера (4): $\sqrt{-x^2+4x-3}=\sqrt{-(x-1)(x-3)}=t(x-1)$, $-(x-1)(x-3)=t^2(x-1)^2$, $-(x-3)=t^2(x-1)$, $x=\dfrac{t^2+3}{t^2+1}$, $u=t(x-1)=\dfrac{2t}{t^2+1}$, $\mathrm{d}x=\dfrac{-4t\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$, $\dfrac{\mathrm{d}x}{(x-2)\sqrt{-x^2+4x-3}}=\dfrac{2\mathrm{d}t}{t^2-1}$; $t=\sqrt{\dfrac{3-x}{x-1}}$. Следовательно,

$$I=2\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}=\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}}\right|+C.$$

9. Найти $I=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{1+x-x^2}}$.

Решение. Здесь $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)u}=R(x,u)$, где $u=\sqrt{1+x-x^2}$, $c=1>0$. Применим третью подстановку Эйлера (5): $\sqrt{1+x-x^2}=tx-1$, $1+x-x^2=t^2x^2-2tx+1$, $x=\dfrac{2t+1}{t^2+1}$, $u=\dfrac{t^2+t-1}{t^2+1}$, $\mathrm{d}x=\dfrac{-2(t^2+t-1)}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t$, $\dfrac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{1+x-x^2}}=\dfrac{-2\mathrm{d}t}{t^2+2t+2}$, $t=\dfrac{1+\sqrt{1+x-x^2}}{x}$. Следовательно,

$$I=-2\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t+2}=-2\int\frac{\mathrm{d}(t+1)}{(t+1)^2+1}=-2\,\mathrm{arctg}\,(t+1)+C=$$

$$=-2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1+x+\sqrt{1+x-x^2}}{x}+C.$$

Отметим, что вторую подстановку Эйлера можно записать в виде $\sqrt{\dfrac{a(x-\beta)}{x-\alpha}}=\pm t$. В этом случае квадратичная иррациональность сводится к дробно-линейной иррациональности:

$$u=\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=|x-\alpha|\sqrt{\frac{a(x-\beta)}{x-\alpha}}.$$

Такой случай уже был рассмотрен в п. 6; рекомендованная там подстановка совпадает со второй подстановкой Эйлера.

Применение подстановок Эйлера для интегрирования квадратичных иррациональностей приводит к довольно громоздким выкладкам. На практике для их интегрирования применяют и другие методы. Укажем один из них.

Подстановкой $z=x+\frac{b}{2a}$ выражение $u=\sqrt{ax^2+bx+c}$ может быть приведено к виду $u=\sqrt{a\left(z^2-\frac{D}{4a^2}\right)}$, а интеграл $\int R(x, u)\,dx$ — к виду $\int R_1\left(z, \sqrt{a\left(z^2-\frac{D}{4a^2}\right)}\right)dz$, где $D=b^2-4ac$. В зависимости от комбинации знаков a и D возможны следующие случаи:

$\int r_1(z, \sqrt{p^2-z^2})\,dz$, $\int r_2(z, \sqrt{z^2-p^2})\,dz$, $\int r_3(z, \sqrt{z^2+p^2})\,dz$,

где $p^2=\frac{|D|}{4a^2}$. Во всех этих случаях подстановки

$$z=p\sin t,\ z=p\cos t,\ z=\frac{p}{\sin t},\ z=\frac{p}{\cos t},\ z=p\,\mathrm{tg}\,t, \tag{6}$$

называемые *тригонометрическими*, приводят соответствующие интегралы к интегралу вида $\int r(\sin t, \cos t)\,dt$, который выражается в элементарных функциях, так как допускает применение метода рационализации (см. п. 4). Практически во многих случаях интегрирование может быть осуществлено и другими методами.

Примеры. 10. Найти интеграл из примера 8 с помощью тригонометрической подстановки.

Решение. Предварительно преобразуем подынтегральное выражение: $-x^2+4x-3=1-(x-2)^2$; полагая $x-2=z$, получим $\frac{dx}{(x-2)\sqrt{-x^2+4x-3}}=\frac{dz}{z\sqrt{1-z^2}}$. Теперь положим $z=\sin t$; тогда $dz=\cos t\,dt$. Далее, находим

$$\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{-x^2+4x-3}}=\int\frac{dt}{\sin t}=\int\frac{\sin t\,dt}{\sin^2 t}=-\int\frac{d(\cos t)}{1-\cos^2 t}=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos t}{1-\cos t}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(1-\cos t)^2}{1-\cos^2 t}\right|+C=\ln\left|\frac{1-\cos t}{\sin t}\right|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-(x-2)^2}}{x-2}\right|+C=\ln\left|\frac{1-\sqrt{-x^2+4x-3}}{x-2}\right|+C.$$

В примере 8 был получен ответ, записанный в другой форме. Его легко привести к указанной здесь форме записи: достаточно умножить числитель и знаменатель дроби под знаком логарифма на $(\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x})$.

11. Найти $I=\int\frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$.

Решение. Здесь отпадает необходимость предварительного преобразования подынтегрального выражения. Применим тригонометрическую подстановку $x=\operatorname{tg} t$; тогда $dx=\frac{dt}{\cos^2 t}$, $(1+x^2)^{3/2}=$ $=(1+\operatorname{tg}^2 t)^{3/2}=\frac{1}{\cos^3 t}$, $\frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}=\cos t\, dt$. Следовательно,

$$I=\int \cos t\, dt=\sin t+C=\frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}+C=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

3⁰. Упражнения

Найдите неопределенные интегралы

1. $\int \frac{e^{2x}\, dx}{e^x-2}$.
2. $\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x-2}$.
3. $\int \operatorname{tg}^4 x\, dx$.
4. $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}\, dx$.
5. $\int \frac{dx}{1-\sin 2x+3\cos^2 x}$.
6. $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$.
7. $\int \frac{dx}{3\sin x+4\cos x}$.
8. $\int \frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}$.
9. $\int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}$.
10. $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}\, dx$.
11. $\int \frac{\left(2+\sqrt[3]{x}\right) dx}{\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[6]{x}\right)\sqrt[6]{x^5}}$.
12. $\int \frac{\sqrt{x+9}}{x}\, dx$.
13. $\int \frac{x^2\, dx}{(4x-3)\sqrt{4x-3}}$.
14. $\int \sqrt{\frac{x}{x+5}}\,\frac{dx}{x^2}$.
15. $\int (x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx$.
16. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}$.
17. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+3x-2}}$.
18. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+1}}$.

§ 1.5*. О таблицах неопределенных интегралов. Интегралы, не выражающиеся в элементарных функциях

Для практического получения выражений неопределенных интегралов в конечном виде составлены и издаются обширные справочники и таблицы неопределенных интегралов*.

---

* См., например: Бычков Ю. А., Марычев О. И., Прудников А. П. Таблицы неопределенных интегралов. М., 1986; Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М., 1983.

При пользовании такими таблицами надо внимательно ознакомиться с их построением, с принципами группировки содержащихся в них интегралов. Иногда данный интеграл в своем непосредственном виде в справочнике отсутствует, но может быть приведен к имеющемуся там виду некоторыми преобразованиями. Для таких преобразований надо использовать свойства неопределенных интегралов и методы интегрирования. Поэтому и при наличии справочников и таблиц для успешного их применения необходимо твердо знать свойства неопределенных интегралов и основные методы интегрирования.

Доказано, что существуют элементарные функции, первообразные которых, а значит и неопределенные интегралы, в элементарных функциях не выражаются. Эти первообразные (неопределенные интегралы) существуют, имеют важные практические приложения и подробно изучаются в математическом анализе. Укажем некоторые из них.

$$\int e^{-x^2}\,dx,\quad \int \frac{dx}{\ln x},\quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx,\quad \int \frac{\cos x}{x}\,dx,$$

$$\int \sin x^2\,dx,\quad \int \cos x^2\,dx,\quad \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x)}} \quad (k^2<1),$$

и ряд других. Отметим еще интеграл $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$, где a и b — произвольные, а m, n, p — рациональные числа, причем a, b, n отличны от нуля; подынтегральное выражение этого интеграла называется *биномиальным дифференциалом*. Великий русский математик П. Л. Чебышев доказал, что этот интеграл выражается в элементарных функциях в том и только в том случае, когда хотя бы одно из чисел p, $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n}+p$ целое. Если же это условие не выполнено, то указанный интеграл в элементарных функциях не выражается. Например, интеграл $\int \sqrt{1+x^3}\,dx$ в элементарных функциях не выражается, так как его подынтегральное выражение $\sqrt{1+x^3}\,dx$ представляет собой биномиальный дифференциал при $m=0$, $n=3$, $p=1/2$ и ни одно из чисел $p=1/2$, $\frac{m+1}{n}=1/3$, $\frac{m+1}{n}+p=5/6$ не является целым.

Глава II

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 2.1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определенный интеграл как предел интегральных сумм. Геометрический и механический смысл определенного интеграла. Основные свойства определенного интеграла. Производная определенного интеграла по переменному верхнему пределу. Формула Ньютона — Лейбница

1°. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла

Задача о площади криволинейной трапеции. Пусть на плоскости введена прямоугольная декартова система координат xOy и на отрезке $[a, b]$, где $b>a$, определена непрерывная неотрицательная функция $y=f(x)$, т. е. $f(x)\geqslant 0\ \forall x\in[a, b]$. Фигура $aABb$, ограниченная снизу отрезком $[a, b]$ оси Ox, сверху — дугой AB графика функции f, а слева и справа — отрезками прямых $x=a$, $0\leqslant y\leqslant f(a)$ и $x=b$, $0\leqslant y\leqslant f(b)$, называется *криволинейной трапецией* (рис. 1).

Дадим определение площади S криволинейной трапеции $aABb$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n малых отрезков; абсциссы точек разбиения обозначим через $a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$. Набор точек деления $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$* назовем разбиением отрезка $[a, b]$. Через точки разбиения x_k проведем прямые $x=x_k$, параллельные оси Oy. Эти прямые разобьют криволинейную трапецию $aABb$ на n узких полос, каждая из которых также является криволинейной трапецией с основанием $[x_{k-1}, x_k]$. Площадь S трапеции $aABb$ равна сумме площадей n полос, ее составляющих. Если n достаточно велико и все отрезки $[x_{k-1}, x_k]$ малы, то площадь каждой из n полос можно заменить площадью соответствующего прямоугольника (которая вычисляется легко). На каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ выбе-

---

* В дальнейшем этот набор будем обозначать для краткости через $\{x_k\}$.

рем какую-нибудь точку c_k, вычислим значение функции $f(c_k)$ в этой точке и примем его за высоту прямоугольника. В силу непрерывности функция $f(x)$ мало изменяется на отрезках $[x_{k-1}, x_k]$, если они малы. Поэтому на таких отрезках ее приближенно можно считать постоянной и равной $f(c_k)$. Так как площадь одной полосы приближенно равна площади $f(c_k)(x_k - x_{k-1})$ прямоугольника, то для площади S криволинейной трапеции $aABb$ получим приближенное равенство

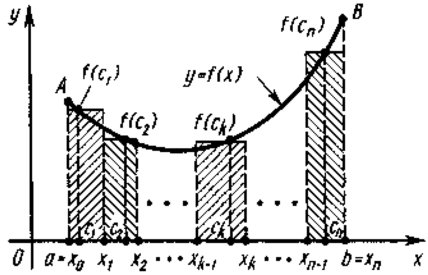


Рис 1

$$S \approx S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k, \text{ где } \Delta x_k = x_k - x_{k-1}. \qquad (1)$$

Приближенное равенство (1) тем точнее, чем меньше величина $d = \max\limits_k \Delta x_k$ $(k = 1, 2, ..., n)$. Величина d называется диаметром разбиения $\{x_k\}$. По определению, *площадью S криволинейной трапеции* называется предел суммы S_n площадей прямоугольников при стремлении диаметра разбиения к нулю, т. е.

$$S = \lim_{d\to 0} S_n = \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k. \qquad (2)$$

Следовательно, вычисление площади криволинейной трапеции приводит к вычислению предела суммы вида (2) при $d \to 0$.

З а д а ч а о п р о й д е н н о м п у т и. Если закон движения какой-либо точки задан уравнением вида $s = f(t)$, где t — время, а s — пройденный путь, то производная $f'(t)$ функции $f(t)$ равна скорости v движения в данный момент времени, т. е. $v = f'(t)$. В физике часто приходится решать следующую обратную задачу. Пусть точка движется по прямой со скоростью v. Будем считать, что эта скорость является непрерывной функцией времени t. Определим путь s, пройденный точкой за некоторый отрезок $[a, b]$ времени от момента $t = a$ до момента $t = b$. Разобьем отрезок $[a, b]$ точками $a = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = b$ на n достаточно малых отрезков времени. Так как за короткий отрезок времени $[t_{k-1}, t_k]$ скорость $v(t)$ почти не изменяется, то можно приближенно считать ее за этот отрезок времени постоянной и равной $v(c_k)$, где $c_k \in [t_{k-1}, t_k]$. Это означает, что движение точки на отрезке $[t_{k-1}, t_k]$ считается равномерным. Тогда путь, пройденный точкой за это время, равен $v(c_k)(t_k - t_{k-1})$, а путь, пройденный за отрезок времени $[a, b]$, составляет $s \approx s_n =$

$=\sum\limits_{k=1}^{n} v(c_k)\Delta t_k$, где $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$. Это приближенное равенство тем точнее, чем меньше величина $d=\max\limits_k \Delta t_k$ $(k=1, 2, ..., n)$. По определению, *путем* s называется предел вышеуказанной суммы при $d\to 0$, т. е.

$$s=\lim_{d\to 0} s_n=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} v(c_k)\Delta t_k. \qquad (3)$$

Следовательно, вычисление пройденного пути приводит к нахождению предела суммы вида (3) при $d\to 0$.

В рассмотренных двух задачах применялся один и тот же метод, сводившийся к нахождению предела сумм некоторого вида. К нахождению предела сумм, аналогичных рассмотренным выше, приводит ряд задач естествознания и техники. Поэтому займемся изучением выражений (2) и (3), называемых определенными интегралами, уже не интересуясь их конкретным истолкованием.

2°. Интегральные суммы Римана и определенный интеграл. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция $f(x)$. Выполним следующие четыре действия (операции):

1) разобьем отрезок $[a, b]$ на части точками $a=x_0<x_1<...<x_{n-1}<x_n=b$. Положим $d=\max\limits_k (x_k-x_{k-1})$ $(k=1, 2, ..., n)$. Набор точек деления $\{x_k\}$ назовем *разбиением* отрезка $[a, b]$, а величину d — *диаметром разбиения*;

2) выберем на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ разбиения по одной точке c_k и вычислим в этой точке значение $f(c_k)$ функции f. Точки c_k $(k=1, 2, ..., n)$ назовем *отмеченными точками*;

3) умножим значение $f(c_k)$ на длину x_k-x_{k-1} соответствующего отрезка $[x_{k-1}, x_k]$ и сложим все найденные произведения. Суммы вида

$$\omega_n=\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k, \text{ где } \Delta x_k=x_k-x_{k-1}, \qquad (4)$$

назовем (одномерными) *интегральными суммами Римана* для функции f по заданному разбиению $\{x_k\}$ отрезка $[a, b]$;

4) измельчим разбиение $\{x_k\}$, т. е. добавим новые точки деления, и найдем предел при $d\to 0$ интегральных сумм (4) (если он существует).

Введем понятие предела интегральных сумм ω_n при $d\to 0$.

Определение 1. Число I называется *пределом интегральных сумм Римана* ω_n при $d\to 0$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что $|I-\omega_n|<\varepsilon$ при любом разбиении $\{x_k\}$ отрезка $[a, b]$ с диаметром разбиения $d<\delta$ независимо от выбора отмеченных точек $c_k\in[x_{k-1}, x_k]$ $(k=1, ..., n)$.

Принята следующая запись этого определения: $I=\lim\limits_{d\to 0}\omega_n$.

Комментарий к определению 1. Очевидно, что число I не зависит от разбиения $\{x_k\}$ отрезка $[a, b]$ и от выбора отмеченных точек $c_1, \ldots, c_n$.

Определение 2. Если интегральные суммы Римана (4) имеют предел при $d \to 0$, то этот предел называется *определенным* (однократным) *интегралом* (*по Риману*) от функции f по отрезку $[a, b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Итак, по определению имеем

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k. \tag{5}$$

В этом случае функция f называется *интегрируемой по Риману* на отрезке $[a, b]$. Числа a и b называют соответственно *нижним* и *верхним пределами интегрирования,* функцию f — *подынтегральной функцией,* а выражение $f(x)\,\mathrm{d}x$ — *подынтегральным выражением.*

Комментарии к определению 2. 1) Так как в настоящей книге не рассматриваются другие определенные интегралы, кроме интеграла Римана, то в дальнейшем вместо терминов «интеграл Римана», «интегрируемая по Риману функция» будем соответственно писать: «интеграл» и «интегрируемая функция».

2) Определение 2 можно кратно сформулировать так: определенным (однократным) интегралом от заданной функции по заданному отрезку называется предел интегральных сумм Римана для заданной функции при стремлении к нулю диаметров разбиений отрезка, порождающих интегральные суммы.

В приведенных выше определениях существенно предполагалось, что $a < b$. Обобщим понятие определенного интеграла на случаи, когда $a = b$ и $a > b$.

При $a > b$ по определению полагаем

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{6}$$

Равенство (6) означает, что при перемене пределов интегрирования знак определенного интеграла меняется на противоположный.

При $a = b$ по определению полагаем

$$\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{7}$$

Равенство (7) означает, что определенный интеграл с совпадающими пределами интегрирования равен нулю.

Так как интегральная сумма (4) не зависит от того, какой буквой обозначен аргумент данной функции, то и ее предел, т. е. определенный интеграл, не зависит от обозначения переменной интегрирования: $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_a^b f(z)\,\mathrm{d}z$ и т. д.

Приведем условия, при которых функция является интегрируемой.

Теорема 1 (необходимое условие интегрируемости). *Если функция f интегрируема на некотором отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.*

Доказательство. Допустим, что интегрируемая на отрезке $[a, b]$ функция f не ограничена на нем. Тогда при любом разбиении $\{x_k\}$ этого отрезка она окажется неограниченной по крайней мере на одном из отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ разбиения. В этом случае, выбирая различными способами точку $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$, можно сделать произведение $f(c_k)\Delta x_k$ сколь угодно большим. Значит, интегральные суммы становятся сколь угодно большими за счет выбора только точек $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ и не могут стремиться ни к какому пределу при $d \to 0$. Следовательно, f не интегрируема на $[a, b]$. Из полученного противоречия вытекает утверждение теоремы.

Теорема 2 (достаточное условие интегрируемости). *Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция f интегрируема на этом отрезке.*

Комментарии к теореме 2. 1) Доказательство теоремы 2 см. в п. 5⁰ § 2.2 *.

2) Свойство непрерывности функции является лишь достаточным условием ее интегрируемости. Иными словами, могут существовать разрывные на отрезке $[a, b]$ функции, но интегрируемые на этом отрезке (подробнее см. п. 5⁰ § 2.2*).

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_a^b e^x\,\mathrm{d}x$ $(0<a<b)$.

Решение. Так как функция e^x непрерывна на $[a, b]$, то в силу теоремы 2 искомый интеграл существует. Вычислим его по формуле (5). Разобьем отрезок интегрирования $[a, b]$ на n равных частей и построим n полос одинаковой ширины $\Delta x=(b-a)/n$. Абсциссы точек разбиения таковы: $x_0=a$, $x_1=a+\Delta x$, $x_2=a+2\Delta x$, ..., $x_{n-1}=$ $=a+(n-1)\Delta x$, $x_n=a+n\Delta x=b$. В качестве отмеченной точки c_k выберем левый конец x_{k-1} основания k-й полосы. Составим интегральную сумму Римана:

$$\omega_n=e^a\Delta x+e^{a+\Delta x}\Delta x+\ldots+e^{a+(n-1)\Delta x}\Delta x=$$
$$=e^a\Delta x(1+e^{\Delta x}+\ldots+e^{(n-1)\Delta x})=e^a\Delta x\,\frac{1-e^{n\Delta x}}{1-e^{\Delta x}},$$

так как выражение в скобках есть сумма n членов геометрической прогрессии со знаменателем $q=e^{\Delta x}$, которая равна $\frac{1-q^n}{1-q}$. Используя формулу (5), находим

$$\int_a^b e^x\,dx = \lim_{d\to 0}\omega_n = \lim_{\Delta x\to 0} e^a\Delta x\,\frac{1-e^{n\Delta x}}{1-e^{\Delta x}}.$$

Поскольку $n\,\Delta x = b-a$, имеем

$$\int_a^b e^x\,dx = \lim_{\Delta x\to 0} e^a\Delta x\,\frac{1-e^{b-a}}{1-e^{\Delta x}} = (e^a-e^b)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{1-e^{\Delta x}}.$$

На основании правила Лопиталя получим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{1-e^{\Delta x}} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{-e^{\Delta x}} = -1.$$

Следовательно, $\int_a^b e^x\,dx = e^b - e^a$.

Этот пример показывает, что вычисление интеграла по формуле (5) громоздко и вызывает значительные трудности. Поэтому желательно получить эффективный метод вычисления определенного интеграла, позволяющий избежать тех трудностей, к которым ведет применение формулы (5). Такой метод будет изложен в п. 5°; он является следствием глубокой связи между определенным и неопределенным интегралами, открытой Ньютоном и Лейбницем.

3°. Геометрический и механический смысл определенного интеграла. Вернемся к задаче о площади криволинейной трапеции. Так как правая часть равенства (2) есть интегральная сумма Римана, то, учитывая формулу (5), получаем: если $f(x)$ интегрируема и неотрицательна на $[a, b]$, то *определенный интеграл от $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ равен площади криволинейной трапеции, ограниченной линиями* $y=f(x)\geqslant 0$, $y=0$, $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ (геометрический смысл определенного интеграла в случае неотрицательности подынтегральной функции). Если подынтегральная функция отрицательна или меняет на $[a, b]$ знак, то в интегральной сумме (2) некоторые члены будут иметь знак минус. Тогда предел интегральной суммы, т. е. определенный интеграл, будет равен алгебраической сумме площадей частей криволинейной трапеции, причем площади частей, лежащих выше оси Ox, берутся со

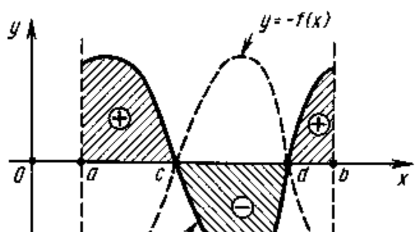


Рис. 2

знаком плюс, а площади частей, лежащих ниже оси Ox, — со знаком минус (рис. 2).

Перейдем теперь к задаче о пройденном пути. Так как правая часть равенства (3) есть интегральная сумма, то в силу формулы (5) получаем: если скорость $v(t)$ непрерывна и положительна на $[a, b]$, *то определенный интеграл от скорости $v(t)$ по отрезку времени $[a, b]$ равен пути, пройденному точкой от момента $t=a$ до момента $t=b$* (механический смысл определенного интеграла).

Примеры. 1. Вычислить $\int\limits_0^2 f(x)\,dx$, где $f(x)=\begin{cases} x & \text{при } x\in[0, 1], \\ 2-x & \text{при } x\in[1, 2]. \end{cases}$

Решение. Построим график подынтегральной функции (рис. 3). В силу геометрического смысла определенного интеграла имеем $\int\limits_0^2 f(x)\,dx=S$, где S — площадь прямоугольного треугольника ABC. Так как $S=0{,}5\cdot 2\cdot 1=1$, то $\int\limits_0^2 f(x)\,dx=1$.

2. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \sin x\,dx$.

Решение. Воспользуемся геометрическим смыслом определенного интеграла со знакопеременной подынтегральной функцией (рис. 4). На отрезке интегрирования $[0, 2\pi]$ подынтегральная функция меняет знак. Обозначим через S_1 и S_2 площади, ограниченные осью Ox и соответственно верхней и нижней полуволной синусоиды. В силу свойств синусоиды, имеем $S_1=S_2$. Следовательно, $\int\limits_0^{2\pi} \sin x\,dx=S_1-S_2=0$.

4°. Основные свойства определенного интеграла

1°. *Если подынтегральная функция равна единице, то*

$$\int\limits_a^b dx=b-a. \tag{8}$$

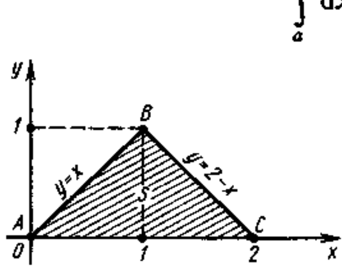


Рис. 3

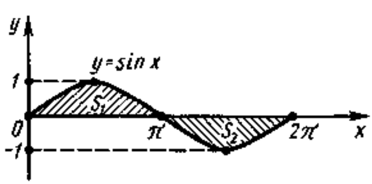


Рис. 4

Доказательство. Составим интегральную сумму; имеем $\sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_k = b - a$. Переходя к пределу при $d \to 0$, получаем равенство (8).

2^0. *Если A — некоторое число и функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то*

$$\int_a^b Af(x)\,\mathrm{d}x = A\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{9}$$

т. е. постоянный множитель A можно выносить за знак интеграла.

Доказательство. Составим интегральную сумму для функции $Af(x)$. Имеем

$$\sum_{k=1}^{n} Af(c_k)\Delta x_k = A\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k.$$

Переходя к пределу при $d \to 0$, получим равенство (9).

3^0. *Если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — две интегрируемые функции, определенные на отрезке $[a, b]$, то*

$$\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x, \tag{10}$$

т. е. интеграл от суммы двух функций равен сумме двух интегралов от слагаемых функций.

Свойство 3^0 очевидным образом распространяется на сумму любого числа интегрируемых функций.

Доказательство. Используя формулу (5), получим

$$\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)]\,\mathrm{d}x = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} [f_1(c_k)+f_2(c_k)]\Delta x_k =$$

$$= \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f_1(c_k)\Delta x_k + \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f_2(c_k)\Delta x_k = \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x.$$

4^0. Аддитивность интеграла как функции отрезка интегрирования. *Пусть $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Если этот отрезок разделен точкой c на части $[a, c]$ и $[c, b]$, то интеграл по всему отрезку равен сумме интегралов по его частям, т. е.*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad (a < c < b). \tag{11}$$

Доказательство. При разбиении отрезка $[a, b]$ на части включим точку c в число точек деления. Если $c=x_m$, то

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{m} f(c_k)\Delta x_k+\sum_{k=m+1}^{n} f(c_k)\Delta x_k.$$

Каждая из написанных выше сумм является интегральной соответственно для отрезков $[a, b]$, $[a, c]$ и $[c, b]$. Вычисляя предел при $d\to 0$, получим равенство (11).

Сформулируем свойство 4^0 в более общей форме.

5^0. *Пусть функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[\alpha, \beta]$. *Если* a, b, c — *точки этого отрезка, то*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x;\ a,\ b,\ c\in[\alpha,\ \beta]. \qquad (12)$$

Доказательство. Если из точек a, b и c по крайней мере две совпадают, то равенство (12) очевидно. Пусть все эти точки различны. Если $a<c<b$, то равенство (12) справедливо на основании свойства 4^0. Если же $c<b<a$, то $\int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x=\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x+$ $+\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$, откуда $-\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
Остается дважды применить формулу (6). Другие случаи взаимного расположения точек a, b, c также легко свести к свойству 4^0.

6^0. Монотонность. *Если функции* $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *интегрируемы, удовлетворяют условию* $f_1(x)\leqslant f_2(x)$ $\forall x\in[a, b]$ *и нижний предел интеграла не больше верхнего* $(a\leqslant b)$, *то*

$$\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x \quad (a\leqslant b), \qquad (13)$$

т. е. при $a\leqslant b$ *неравенство можно интегрировать почленно.*

Доказательство. При $a=b$ равенство (13) очевидно. Если же $a<b$, то справедливо неравенство $\sum_{k=1}^{n} f_1(c_k)\Delta x_k\leqslant\sum_{k=1}^{n} f_2(c_k)\Delta x_k$, так как все $\Delta x_k>0$ $(k=1, \dots, n)$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $d\to 0$, получим неравенство (13).

7^0. Оценка определенного интеграла. *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на* $[a, b]$, *нижний предел интеграла не больше верхнего* $(a\leqslant b)$ *и* $f(x)$ *удовлетворяет условию* $m\leqslant f(x)\leqslant M$ $\forall x\in[a, b]$, *то*

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant M(b-a). \qquad (14)$$

В частности, если $f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [a, b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

Доказательство. Оценки (14) получаются, если проинтегрировать каждый член неравенств $m \leqslant f(x) \leqslant M$ и использовать свойства 1^0 и 6^0.

Свойство 7^0 имеет простой геометрический смысл в случае, если подынтегральная функция неотрицательна на $[a, b]$ (рис. 5): площадь криволинейной трапеции $aABb$ больше площади прямоугольника с высотой m, но меньше площади прямоугольника с высотой M.

Пример. Оценить значение определенного интеграла от непрерывной функции e^{-x^2} на отрезке $[0, 1]$.

Решение. Так как функция e^{-x^2} монотонно убывает на отрезке $[0, 1]$ и $m = e^{-1} = 1/e$, $M = e^0 = 1$, то $1/e \leqslant e^{-x^2} \leqslant 1$. Тогда в силу неравенств (14) получим

$$\frac{1}{e}(1-0) \leqslant \int\limits_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x \leqslant 1(1-0) \text{ или } \frac{1}{e} \leqslant \int\limits_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x \leqslant 1.$$

8^0. Теорема о среднем значении. *Пусть функция f интегрируема на $[a, b]$ и обладает свойством $m \leqslant f(x) \leqslant M$ $\forall x \in [a, b]$. Тогда существует такое число $\mu \in [m, M]$, что*

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mu(b-a). \tag{15}$$

Доказательство. Если $a = b$, то равенство (15) очевидно. Если же $a \neq b$, то определим число μ формулой

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{16}$$

Тогда из неравенств (14) вытекает, что $m \leqslant \mu \leqslant M$, если $a < b$. Так как обе части равенства (15) изменяют знак при перестановке пределов a и b, то оно справедливо и при $b < a$.

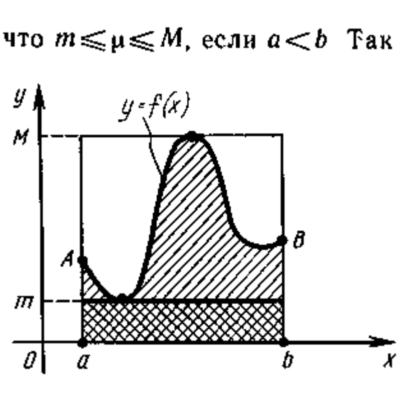


Рис. 5

Число, определяемое равенством (16), называется *средним значением* функции f на отрезке $[a, b]$.

Из свойства 8^0 вытекает следующее свойство.

9^0. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то най-*

дется значение $c\in[a, b]$ *такое, что*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a). \tag{17}$$

Доказательство. Поскольку функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, по теореме о промежуточном значении (см. том I, § 2.9) существует число $c\in[a, b]$ такое, что $f(c)=\mu$, где $m\leqslant\mu\leqslant M$, а m и M — наименьшее и наибольшее значения $f(x)$ на $[a, b]$. Таким образом, равенство (17) вытекает из (16).

Из равенства (17) следует, что среднее значение непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ равно значению $f(c)$ подынтегральной функции для некоторого $c\in[a, b]$. Геометрический смысл равенства (17) иллюстрирует рис. 6. В силу геометрического смысла интеграла левая часть равенства (17) есть площадь криволинейной трапеции $aABb$. Правая же часть этого равенства есть площадь прямоугольника $aA'B'b$ с высотой $f(c)$ и шириной $b-a$. Таким образом, геометрический смысл соотношения (17) таков: существует среднее значение $f(c)$ непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ такое, что площадь под кривой $y=f(x)$ равна площади прямоугольника с высотой $f(c)$, построенного на отрезке $[a, b]$.

5⁰. Непрерывность и дифференцируемость определенного интеграла по переменному верхнему пределу. Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$. Тогда она интегрируема на любом отрезке $[a, x]$, где $a\leqslant x\leqslant b$, т. е. для любого $x\in[a, b]$ существует интеграл

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt. \tag{18}$$

Если $f(t)\geqslant 0$ $\forall t\in[a, b]$, то $F(x)=S(x)$, где $S(x)$ — площадь криволинейной трапеции $aALx$ (рис. 7). Функция F, определенная соотношением (18) на отрезке $[a, b]$, называется *интегралом с переменным верхним пределом*. Эта функция непрерывна и дифференцируема на отрезке $[a, b]$. А именно, имеет место следующая фундаментальная теорема.

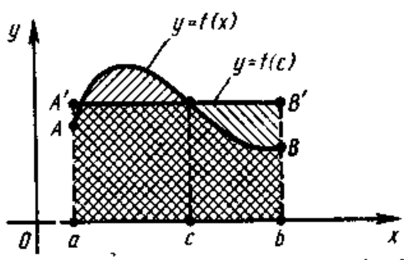


Рис. 6

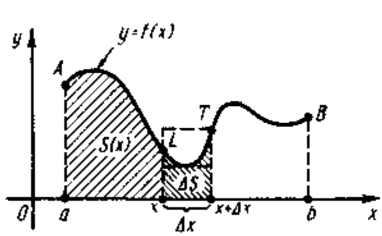


Рис. 7

Теорема 3 (теорема Ньютона—Лейбница). *Производная определенного интеграла от непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции f, рассматриваемого как функция его верхнего предела, существует и равна значению подынтегральной функции в точке дифференцирования:*

$$F'(x)=\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'_x=f(x),\quad x\in[a, b]. \tag{19}$$

Доказательство. Пусть $x\in[a, b]$, $x+\Delta x\in[a, b]$; тогда в силу свойства 5° получим $F(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt=\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$. Найдем соответствующее приращение ΔF функции F. Используя равенства (17) и (18), имеем

$$\Delta F=F(x+\Delta x)-F(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt=f(c)\Delta x,\ \text{где}\ c\in[x, x+\Delta x].$$

Вычислим производную функции (18):

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c)\,\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(c).$$

Если $\Delta x\to 0$, то $x+\Delta x\to x$ и $c\to x$, так как $c\in[x, x+\Delta x]$. Тогда в силу непрерывности f получим

$$F'(x)=\lim_{c\to x} f(c)=f(x),$$

что и требовалось установить. Из теоремы 3, в частности, вытекает, что F — непрерывная функция на $[a, b]$.

Теорема 3 выражает одну из фундаментальных теорем математического анализа. Она вскрывает глубокую связь между двумя понятиями — производной и определенного интеграла.

Поскольку функция $F(x)$, обладающая свойством $F'(x)=f(x)$, есть первообразная функция для $f(x)$, теорему Ньютона — Лейбница можно сформулировать так: *определенный интеграл от непрерывной функции, рассматриваемый как функция своего верхнего предела, является первообразной функцией для подынтегральной функции.*

Отсюда легко вытекает следующее утверждение: всякая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция имеет на этом отрезке первообразную. При этом одной из первообразных является интеграл (18). Действительно, пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$; тогда она интегрируема на любом отрезке $[a, x]$, где $x\in[a, b]$, т. е. существует интеграл (18), который и является первообразной функцией для f. Следовательно, неопределенный интеграл от непрерывной на $[a, b]$ функции f можно записать в виде

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t+C,\quad x\in[a,\ b],$$

где C — произвольная постоянная.

6⁰. Формула Ньютона — Лейбница. **Теорема 4** (основная теорема интегрального исчисления). *Если Φ — первообразная функция для непрерывной на $[a,\ b]$ функции f, то определенный интеграл от функции f вычисляется по формуле*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\Phi(b)-\Phi(a). \tag{20}$$

Другими словами, *определенный интеграл от непрерывной функции равен приращению какой-либо первообразной для этой функции на промежутке интегрирования*. Формула (20) называется *формулой Ньютона — Лейбница*.

Доказательство. Пусть Φ — некоторая первообразная для функции f. В силу теоремы 3 функция (18) также является первообразной для функции f. Поскольку две первообразные Φ и F отличаются друг от друга на некоторую постоянную, имеем

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=\Phi(x)+C. \tag{21}$$

Положим в последнем равенстве $x=a$. Так как $\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t=0$, то $0=\Phi(a)+C$, откуда $C=-\Phi(a)$. Подставляя найденное значение C в соотношение (21), имеем $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=\Phi(x)-\Phi(a)$. Полагая в последнем соотношении $x=b$ и обозначая переменную t через x, окончательно получим равенство (20).

Формулу Ньютона — Лейбница в сокращенном виде принято записывать так:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\Phi(x)\Big|_a^b=\Phi(b)-\Phi(a).$$

Символ $\Big|_a^b$ называется *знаком двойной подстановки* пределов интегрирования и означает, что определенный интеграл равен разности значений первообразной функции Φ соответственно при верхнем b и нижнем a пределах интегрирования.

Примеры. 1. $\int_2^3 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\Big|_2^3=\frac{3^3}{3}-\frac{2^3}{3}=\frac{19}{3}$.

2. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln|x+\sqrt{x^2+1}|\Big|_0^1 = \ln(1+\sqrt{2}) - \ln 1 = \ln(1+\sqrt{2})$.

3. $\int\limits_0^{2\pi} \sin x\, dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = -\cos 2\pi + \cos 0 = 0$ (ср. с решением примера 2 п. 3°).

4. $\int\limits_a^b e^x\, dx = e^x \Big|_a^b = e^b - e^a$ (ср. с решением примера из п. 2°).

5. Найти среднее значение функции $y=\sin x$ на отрезке $[0, \pi]$. Решение. В силу соотношений (16) и (17) имеем

$$f(c) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \sin x\, dx = \frac{1}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

6°. Упражнения

Составляя интегральные суммы и переходя к пределу, найдите определенные интегралы:

1. $\int\limits_0^a e^x\, dx$. 2. $\int\limits_0^a x\, dx$.

Пользуясь формулой Ньютона — Лейбница, вычислите определенные интегралы:

3. $\int\limits_1^3 x^3\, dx$. 4. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$. 5. $\int\limits_0^{\pi/4} \sin 4x\, dx$.

6. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. 7. $\int\limits_0^{\pi/3} \operatorname{tg} x\, dx$. 8. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x}$. 9. $\int\limits_1^a \frac{dx}{2x-1}$.

10. $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx$. 11. $\int\limits_2^3 \frac{dx}{x^2}$. 12. $\int\limits_0^a (x^2 - ax)\, dx$.

§ 2.2*. Площадь как предел. Интегральные суммы Дарбу. Признаки существования определенного интеграла. Вычисление площади с помощью интеграла. Классы интегрируемых функций

1°. Площадь как предел. *Плоской фигурой* называется произвольное множество A, заданное на плоскости $\mathbf{R}^2$. *Многоугольником* называется плоская фигура, ограниченная замкнутой ломаной. Например, на рис. 8 фигуры A и B являются

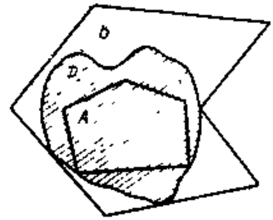


Рис. 8

многоугольниками. Для многоугольника понятие площади изучается в школьном курсе геометрии.

Напомним, что *ограниченным* множеством называется такое множество, которое содержится внутри некоторого круга с центром в начале координат. Множество называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки (см. том I, § 6.1). Ограниченное замкнутое множество будем называть *компактным множеством* (или *компактом*)

Рассмотрим на плоскости компакт Ф Для него можно указать пару многоугольников A и B с площадями $S(A)$ и $S(B)$, из которых один A содержится в Ф, а другой B содержит Ф, т. е $A\subseteq\Phi\subseteq B$ (рис. 8). Таких пар многоугольников можно подобрать бесконечное множество При этом площадь $S(A)$ любого многоугольника A, содержащегося в Ф, не может превзойти площадь $S(B)$ любого многоугольника B, содержащего Ф, т. е. $S(A)\leqslant S(B)$. Следовательно, бесконечное множество площадей $\{S(A)\}$ ограничено сверху, а значит, имеет *точную верхнюю границу* — число $\underline{S}$ такое, что для всех $A\subseteq\Phi$ имеем $S(A)\leqslant\underline{S}$ и для любого числа $M<\underline{S}$ найдется элемент $S^*(A)$ множества $\{S(A)\}$, удовлетворяющий условию $M<S^*(A)\leqslant\underline{S}$. Для обозначения точной верхней границы употребляют символ sup (от латинского supremum — «наивысшее»). Аналогично, бесконечное множество площадей $\{S(B)\}$ ограничено снизу, а значит, имеет *точную нижнюю границу* — число $\bar{S}$ такое, что для всех $B\supseteq\Phi$ имеем $S(B)\geqslant\bar{S}$ и для любого числа $N>\bar{S}$ найдется элемент $S^*(B)$ множества $\{S(B)\}$, удовлетворяющий условию $\bar{S}\leqslant S^*(B)<N$. Для обозначения точной нижней границы употребляют символ inf (от латинского infimum — «наинизшее»). Таким образом, $\underline{S}=\sup\{S(A)\}$, $\bar{S}=\inf\{S(B)\}$.

Определение 1. Если $\underline{S}=\bar{S}=S$, то число S называется *площадью* фигуры Ф, а сама фигура Ф — *квадрируемой*.

Теорема 1. *Для того чтобы фигура Ф была квадрируемой, необходимо и достаточно, чтобы существовали две последовательности многоугольников $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$ такие, что $A_1\subseteq A_2\subseteq\ldots\subseteq A_n\ldots\subseteq\Phi\subseteq\ldots\subseteq B_n\subseteq\ldots\subseteq B_2\subseteq B_1$ и площади $S(A_n)$ и $S(B_n)$ имели бы общий предел:*

$$\lim_{n\to\infty} S(A_n)=\lim_{n\to\infty} S(B_n)=S. \tag{1}$$

Этот предел S и является площадью фигуры Ф.

Доказательство. Необходимость этого условия вытекает из свойств точных границ: если площадь S существует, то $\forall\varepsilon>0$ найдется $N>0$ такое, что $\forall n\geqslant N$ имеем $|S-S(A_n)|<\varepsilon$, что означает существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} S(A_n)=$ $=S$ Аналогично заключаем, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} S(B_n)=S$.

Достаточность следует из неравенств $S(A_n)\leqslant\underline{S}\leqslant\bar{S}\leqslant S(B_n)$ Отсюда видно, что если при $n\to\infty$ пределы последовательностей $\{S(A_n)\}$ и $\{S(B_n)\}$ существуют и равны S, то $\underline{S}=\bar{S}=S$ и, значит, фигура Ф квадрируема.

Пример. Пусть фигура Ф есть круг радиуса R. Впишем в этот круг и опишем вокруг него правильные n-угольники, приняв их за многоугольники A_n и B_n. Очевидно, что $S(A_n)=\dfrac{1}{2}R^2n\sin\dfrac{2\pi}{n}$, $S(B_n)=nR^2\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}$. Найдем пределы

$$\underline{S}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}R^2n\sin\frac{2\pi}{n}=\pi R^2\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{n}=\pi R^2,$$

$$\bar{S}=\lim_{n\to\infty}nR^2\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}=\pi R^2\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\pi}\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}=\pi R^2.$$

Следовательно, $\underline{S}=\bar{S}=\pi R^2$, т е круг есть квадрируемая фигура, и в силу соотношения (1) имеем $S=\pi R^2$, что согласуется с общеизвестной формулой.

Заметим, что в качестве A_n и B_n могут быть использованы ступенчатые фигуры, составленные из прямоугольников.

2°. **Интегральные суммы Дарбу и их свойства.** Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на $[a, b]$. Тогда существуют постоянные m и M такие, что $m \leqslant f(x) \leqslant M$ $\forall x \in [a, b]$ Рассмотрим разбиение $\{x_k\}$ отрезка $[a, b]$. Тогда величины m_k и M_k, обозначающие соответственно точную нижнюю и верхнюю границу на k-м отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ (где $k=1, \ldots, n$), конечны (рис. 9). Суммы вида

$$\underline{S}_n = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k, \quad \overline{S}_n = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k \tag{2}$$

называются соответственно *нижней* и *верхней интегральной суммой Дарбу* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, соответствующей разбиению $\{x_k\}$ этого отрезка. Если $\{x_k\}$ — произвольное разбиение отрезка $[a, b]$, то интегральные суммы Римана и Дарбу связаны неравенствами

$$\underline{S}_n \leqslant \omega_n \leqslant \overline{S}_n. \tag{3}$$

Справедливость неравенств (3) рекомендуем проверить самостоятельно.

Интегральные суммы Дарбу обладают следующими свойствами:

1°. *Верхняя (нижняя) интегральная сумма Дарбу, соответствующая разбиению $\{x_k\}$ отрезка $[a, b]$, является точной верхней (точной нижней) гранью значений интегральных сумм Римана, соответствующих разбиению с отмеченными точками $c_1, \ldots, c_n$ отрезка $[a, b]$, причем точная верхняя (точная нижняя) грань берется по всевозможным наборам $(c_1, \ldots, c_n)$ отмеченных точек.*

Доказательство. В силу неравенств (3) достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой набор $(c_1^*, \ldots, c_n^*)$ отмеченных точек, что имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k^*) \Delta x_k > \overline{S}_n - \varepsilon. \tag{4}$$

По определению чисел M_k для каждого индекса $k=1, \ldots, n$ найдется точка $c_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$, для которой $f(c_k^*) > M_k - \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k^*) \Delta x_k > \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k - \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \overline{S}_n - \varepsilon,$$

что доказывает первую часть свойства 1°. Аналогично доказывается, что нижняя интегральная сумма Дарбу, соответствующая разбиению $\{x_k\}$ отрезка $[a, b]$, является точной нижней гранью значений интеграль-

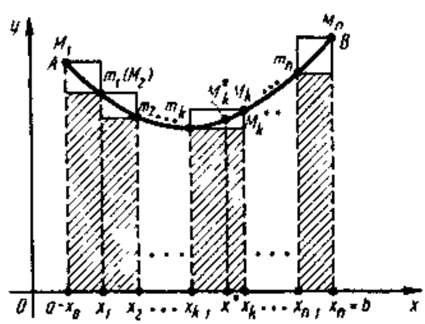


Рис. 9

ных сумм Римана, соответствующих разбиению $\{x_k\}$ с отмеченными точками $c_1, \dots, c_n$ отрезка $[a, b]$.

2°. *От добавления новых точек в разбиении нижняя интегральная сумма* $\underline{S}_n$ *не уменьшается, а верхняя интегральная сумма* $\bar{S}_n$ *не увеличивается*

Доказательство. Присоединим к имеющимся точкам разбиения еще одну x^*. Пусть эта точка находится на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, так что $x_{k-1} < x^* < x_k$ (см. рис. 9). Если обозначить новую верхнюю сумму через $\bar{S}_n^*$, то от прежней $\bar{S}_n$ она будет отличаться только тем, что в сумме $\bar{S}_n$ отрезку $[x_{k-1}, x_k]$ соответствовало слагаемое $M_k(x_k - x_{k-1})$, а в новой сумме $\bar{S}_n^*$ этому отрезку соответствуют два слагаемых $M_k^*(x^* - x_{k-1}) + M_k^{**}(x_k - x^*)$, где M_k^* и M_k^{**} — точные верхние границы функции f на отрезках $[x_{k-1}, x^*]$ и $[x^*, x_k]$. Поскольку эти отрезки являются частями отрезка $[x_{k-1}, x_k]$, имеем $M_k^* \leqslant M_k$ и $M_k^{**} \leqslant M_k$, откуда $M_k^*(x^* - x_{k-1}) \leqslant M_k(x^* - x_{k-1})$, $M_k^{**}(x_k - x^*) \leqslant M_k(x_k - x^*)$. Складывая эти неравенства почленно, получим

$$M_k^*(x^* - x_{k-1}) + M_k^{**}(x_k - x^*) \leqslant M_k(x_k - x_{k-1}),$$

т. е. $\bar{S}_n^* \leqslant \bar{S}_n$. Аналогично для нижней интегральной суммы $\underline{S}_n$ доказывается, что $\underline{S}_n^* \geqslant \underline{S}_n$.

3°. *Каждая нижняя интегральная сумма Дарбу не больше чем каждая верхняя интегральная сумма*

Доказательство. Разобьем отрезок $[a, b]$ и составим интегральные суммы Дарбу $\underline{S}_n^1$ и $\bar{S}_n^1$. Рассмотрим другое, не связанное с первым, разбиение отрезка $[a, b]$. Ему соответствуют суммы Дарбу $\underline{S}_n^2$ и $\bar{S}_n^2$. Покажем, что $\underline{S}_n^1 \leqslant \bar{S}_n^2$. Объединив все точки как первого, так и второго разбиения, получим третье разбиение, которому соответствуют суммы $\underline{S}_n^3$ и $\bar{S}_n^3$. Третье разбиение можно считать полученным из первого добавлением новых точек деления; тогда, согласно свойству 2°, имеем $\underline{S}_n^1 \leqslant \underline{S}_n^3$. Считая, что третье разбиение получено аналогичным образом из второго, находим $\bar{S}_n^3 \leqslant \bar{S}_n^2$. Так как $\underline{S}_n^3 \leqslant \bar{S}_n^3$, то $\underline{S}_n^1 \leqslant \bar{S}_n^2$.

Из свойств 2° и 3° вытекает, что множество $\{\underline{S}_n\}$ нижних интегральных сумм ограничено сверху, например любой из верхних интегральных сумм $\bar{S}_n$. Следовательно, это множество имеет конечную точную верхнюю границу: $\underline{S} = \sup\{\underline{S}_n\}$, $\underline{S} \leqslant \bar{S}_n$. Так как множество верхних интегральных сумм $\{\bar{S}_n\}$ является ограниченным снизу, то оно имеет точную нижнюю границу: $\bar{S} = \inf\{\bar{S}_n\}$, $\bar{S} \geqslant \underline{S}_n$ и $\bar{S} \geqslant \underline{S}$. Сопоставляя все неравенства, для любых $\underline{S}_n$ и $\bar{S}_n$ окончательно получим

$$\underline{S}_n \leqslant \underline{S} \leqslant \bar{S} \leqslant \bar{S}_n. \tag{5}$$

3°. Признаки существования определенного интеграла. Теорема 2. *Ограниченная функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a, b]$ *тогда и только тогда, когда существуют и равны между собой пределы*

$$\underline{I} = \lim_{d \to 0} \underline{S}_n, \quad \bar{I} = \lim_{d \to 0} \bar{S}_n, \quad d = \max_k \Delta x_k. \tag{6}$$

При этом их общее значение $I = \underline{I} = \bar{I}$ *совпадает с интегралом* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Доказательство. Пусть пределы (6) существуют и равны между собой. Тогда в силу свойств предела из неравенств (3) следует существование предела интегральных сумм Римана, причем $\underline{I} = \lim\limits_{d \to 0} \omega_n = \bar{I}$. С другой стороны, если существует предел $\lim\limits_{d \to 0} \omega_n = I$, то из неравенств (3) и (4) вытекает, что существует предел $\lim\limits_{d\to 0}\overline{S}_n=\overline{I}$, причем $\overline{I}=I$ Аналогично доказывается, что $\lim\limits_{d\to 0}\underline{S}_n=\underline{I}=I$. Следовательно, $I=\underline{I}=\overline{I}$.

Теорема 3. *Для существования определенного интеграла от ограниченной функции необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{d\to 0}\left(\overline{S}_n-\underline{S}_n\right)=0,\ d=\max_k \Delta x_k. \tag{7}$$

Условие (7) означает, что для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что если $d<\delta$, то $|\overline{S}_n-\underline{S}_n|<\varepsilon$ независимо от выбора точек $c_k\in[x_{k-1}, x_k]$.

Доказательство. Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$; тогда условие (7) вытекает из теоремы 2. Пусть выполнено условие (7). Тогда существуют и равны пределы $\lim\limits_{d\to 0}\underline{S}_n=\lim\limits_{d\to 0}\overline{S}_n$, откуда, используя неравенства (5), имеем $\underline{S}=\overline{S}$. Полагая $I=\underline{S}=\overline{S}$, получим

$$\underline{S}_n\leqslant I\leqslant\overline{S}_n. \tag{8}$$

С другой стороны, в силу равенства (7) можно построить разбиение отрезка $[a, b]$ такое, что $|\overline{S}_n-\underline{S}_n|<\varepsilon$, тогда из неравенств (4) и (8) вытекает, что $|I-\omega_n|<\varepsilon$, а значит, $I=\lim\limits_{d\to 0}\omega_n$, т е определенный интеграл существует.

4°. Вычисление площади с помощью интеграла. Вернемся к вычислению площади криволинейной трапеции (см. п. 1° § 2.1). Если рассмотреть интегральные суммы Дарбу и соответствующие им фигуры (см рис. 9), то очевидно, что $\underline{S}_n$ представляет собой площадь ступенчатой фигуры, составленной из входящих в $aABb$ прямоугольников, а $\overline{S}_n$ — площадь ступенчатой фигуры, составленной из выходящих за пределы $aABb$ прямоугольников Поэтому для площади S криволинейной трапеции имеем $\underline{S}_n\leqslant S\leqslant\overline{S}_n$. Следовательно, в силу равенства (1) при $d=\max\limits_k\Delta x_k\to 0$, $n\to\infty$ имеем

$$S=\lim\underline{S}_n=\lim\overline{S}_n=I=\int_a^b f(x)\,dx,$$

что и доказывает соотношение (2) § 2 1.

5°. Классы интегрируемых функций. Рассмотрим некоторые классы интегрируемых функций, т е. функций, для которых существует определенный интеграл. Запишем условие (7) в другой форме Обозначая разность M_k-m_k на k-м отрезке через η_k, получим

$$\overline{S}_n-\underline{S}_n=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\,\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}\eta_k\Delta x_k$$

и условие (7) примет вид

$$\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}\eta_k\Delta x_k=0. \tag{9}$$

Докажем теорему 2 § 2.1. Так как $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то в силу свойств непрерывной функции (см. том I, § 2.9) она ограничена на нем и равномерно непрерывна, т. е. для любого заданного числа $\varepsilon>0$ найдется число $\delta>0$ такое, что если $|x-x_0|<\delta$, то $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ при любом положении точек x_0 и x на отрезке $[a, b]$ В этом случае число δ зависит только от ε и не за-

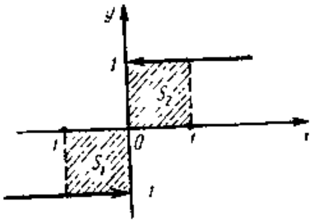


Рис. 10

висит от выбора точек x_0 и x. Поэтому для заданного $\varepsilon>0$ можно подобрать $\delta>0$ такое, что если отрезок $[a, b]$ разбить на части с длинами $\Delta x_k<\delta$, то все $\eta_k<\varepsilon/(b-a)$. Отсюда для любого разбиения $\{x_k\}$ с диаметром $d<\delta$ имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\eta_k\Delta x_k<\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k=$$

$$=\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon.$$

Так как ε — произвольное число, то пределы (6) существуют и на основании теоремы 2 функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$.

На самом деле условие теоремы 2 § 2.1 содержит слишком строгие ограничения для подынтегральной функции. Приведем без доказательства следующие теоремы, содержащие более слабые условия существования определенного интеграла.

Теорема 4. *Ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция, имеющая лишь конечное число точек разрыва первого рода, интегрируема на этом отрезке.*

Пример. Рассмотрим функцию $y=\begin{cases}1 \text{ при } x>0,\\ -1 \text{ при } x<0\end{cases}$ на отрезке $[-1, 1]$. Она имеет одну точку разрыва первого рода — начало координат (рис. 10). По теореме 4 она интегрируема Из геометрических соображений ясно, что $I=$

$$=\int_{-1}^{1}y\,dx=S_2-S_1=0.$$

Из рассмотренного примера видно, что непрерывность подынтегральной функции не является необходимым условием ее интегрируемости.

Теорема 5. *Монотонная ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция интегрируема на этом отрезке*

§ 2.3. Вычисление определенного интеграла. Интегрирование разложением, подстановкой и по частям. Приближенное вычисление определенного интеграла. Формулы прямоугольников, трапеций и Симпсона

1°. Интегрирование разложением. Метод разложения основан на применении свойств 2° и 3° определенного интеграла.

Примеры. 1. $\int_1^2\left(3x^2+\cos x+\frac{1}{x}\right)dx=3\int_1^2 x^2\,dx+\int_1^2\cos x\,dx+$

$$+\int_1^2\frac{dx}{x}=x^3\Big|_1^2+\sin x\Big|_1^2+\ln|x|\Big|_1^2=7+\sin 2-\sin 1+\ln 2.$$

2. $\int_3^4\frac{x^{5/2}+x^{1/2}+1}{1+x^2}dx=\int_3^4\frac{x^{1/2}(x^2+1)}{1+x^2}dx+\int_3^4\frac{dx}{1+x^2}=$

$$=\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_3^4+\operatorname{arctg}x\Big|_3^4=\frac{16}{3}-2\sqrt{3}+\operatorname{arctg}4-\operatorname{arctg}3.$$

2°. Интегрирование подстановкой. Пусть в определенном интеграле $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, где $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, требуется ввести новую переменную t, связанную с прежней переменной x соотношением

$$x=\varphi(t)\quad \forall t\in[\alpha, \beta],\ x\in[a, b], \tag{1}$$

где $\varphi(t)$ — непрерывно дифференцируемая на $[\alpha, \beta]$ функция и $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$.

Если функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, то $\int f(x)\,\mathrm{d}x= =F(x)+C$. Применяя подстановку (1), получим $\mathrm{d}x=\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, откуда $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t=F(\varphi(t))+C$. Воспользуемся формулой Ньютона — Лейбница и вычислим следующие определенные интегралы:

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a), \tag{2}$$

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t=F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=F(b)-F(a). \tag{3}$$

Так как правые части соотношений (2) и (3) равны, то справедлива формула

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{4}$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема. *Определенный интеграл от непрерывной на* $[a, b]$ *функции* $f(x)$ *может быть вычислен по формуле* (4) *с помощью подстановки* (1), *если выполнены условия:* 1) $\varphi(t)$ *и* $\varphi'(t)$ *— непрерывные на* $[\alpha, \beta]$ *функции;* 2) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$; $a\leqslant\varphi(t)\leqslant b$; 3) *функция* $f(\varphi(t))$ *определена и непрерывна на* $[\alpha, \beta]$.

Комментарий к теореме. При вычислении определенного интеграла по формуле (4) нет необходимости возвращаться к старой переменной интегрирования, так как пределы интегрирования изменяются в соответствии с подстановкой.

Примеры. 1. Вычислить $I=\int\limits_0^3 e^{x/3}\,\mathrm{d}x$.

Решение. Воспользуемся подстановкой $t=x/3$, откуда $x=3t$ и $\mathrm{d}x=3\mathrm{d}t$. Найдем новые пределы интегрирования: если $x=0$, то $t=0$; если $x=3$, то $t=1$. Полагая в формуле (4) $\alpha=0$, $\beta=1$, находим

$$I=\int_0^1 e^t 3\,dt=3\int_0^1 e^t\,dt=3e^t\Big|_0^1=3(e-1).$$

2. Вычислить $I=\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx$.

Решение. Применяем подстановку $\sqrt{1+x^2}=t$; тогда $x=\sqrt{t^2-1}$, $dx=\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2-1}}$, $\alpha=1$, $\beta=\sqrt{2}$. По формуле (4) находим

$$I=\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{t^2-1}\cdot t\cdot\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2-1}}=\int_1^{\sqrt{2}}t^2\,dt=\frac{t^3}{3}\Big|_1^{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}.$$

3. Вычислить $I=\int_1^3\frac{dx}{x^2+x}$.

Решение. Имеем

$$I=\int_1^3\frac{dx}{x(x+1)}=\int_1^3\frac{dx}{x}-\int_1^3\frac{dx}{x+1}=\ln|x|\Big|_1^3-\ln|u|\Big|_2^4=\ln\frac{3}{2}.$$

Здесь использованы методы интегрирования рациональных функций с последующей подстановкой $x+1=u$.

4. Вычислить $I=\int_0^{\pi/2}\sin x\cos^2 x\,dx$.

Решение. Находим

$$I=-\int_0^{\pi/2}\cos^2 x\,d(\cos x)=-\int_1^0 u^2\,du=\frac{u^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}.$$

Здесь использованы методы интегрирования тригонометрических функций с последующей подстановкой $\cos x=u$.

5. Вычислить $I=\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{(1+\operatorname{tg} x)^2}\,dx$.

Решение. Имеем

$$I=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{(1+u^2)\,du}{(1+u)^2(1+u^2)}=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{du}{(1+u)^2}=\int_2^{\sqrt{3}+1}\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{t}\Big|_2^{\sqrt{3}+1}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}.$$

Здесь сначала использована подстановка $\operatorname{tg} x=u$, а затем подстановка $u+1=t$.

3^0. **Интегрирование по частям.** Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — две непрерывно дифференцируемые на $[a, b]$ функции. Для краткости аргумент в скобках будем опускать. Дифференцируя произведение uv, имеем $(uv)'=u'v+uv'$, откуда $uv'=(uv)'-u'v$. Интегрируя обе части последнего равенства в пределах от a до b, находим

$$\int_a^b uv'\,dx=\int_a^b (uv)'\,dx-\int_a^b vu'\,dx.$$

Поскольку $v'dx=dv$, $u'dx=du$ и $\int_a^b (uv)'\,dx=uv\Big|_a^b$, окончательно получим

$$\int_a^b u\,dv=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\,du. \qquad (5)$$

Примеры. 1. Вычислить $I=\int_0^\pi x\cos x\,dx$.

Решение. Положим $u=x$, $dv=\cos x\,dx$; тогда $du=dx$, $v=\sin x$. Используя соотношение (5), получим

$$I=x\sin x\Big|_0^\pi-\int_0^\pi \sin x\,dx=\cos x\Big|_0^\pi=-2.$$

2. Вычислить $I=\int_1^e x^2\ln x\,dx$.

Решение. Полагая $u=\ln x$, $dv=x^2dx$, находим $du=\frac{dx}{x}$, $v=\frac{x^3}{3}$. Следовательно,

$$I=\frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^e-\int_1^e\frac{x^3}{3}\,\frac{dx}{x}=\frac{e^3}{3}-\frac{1}{3}\int_1^e x^2\,dx=\frac{e^3}{3}-\frac{x^3}{9}\Big|_1^e=\frac{2e^3+1}{9}.$$

3. Вычислить $I=\int_0^1 x^2e^{3x}\,dx$.

Решение. Находим

$$I=\frac{x^2}{3}e^{3x}\Big|_0^1-\frac{2}{3}\int_0^1 x\,e^{3x}\,dx=\frac{e^3}{3}-\frac{2}{3}\left[\frac{x}{3}e^{3x}\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1 e^{3x}\,dx\right]=$$

$$=\frac{e^3}{3}-\frac{2}{9}e^3+\frac{2}{27}e^{3x}\Big|_0^1=\frac{5e^3-2}{27}.$$

Здесь метод интегрирования по частям применен дважды: сначала мы положили $u=x^2$, $dv=e^{3x}dx$, а затем $u=x$, $dv=e^{3x}dx$.

4. Вычислить $I=\int\limits_0^{\pi/2} e^x \sin x\,dx$.

Решение. Применим формулу (5) дважды: сначала положим $u=e^x$, $dv=\sin x\,dx$; затем $u=e^x$, $dv=\cos x\,dx$. Тогда

$$I=-e^x\cos x\Big|_0^{\pi/2}+\int\limits_0^{\pi/2} e^x\cos x\,dx=1+e^x\sin x\Big|_0^{\pi/2}-I=1+e^{\pi/2}-I.$$

Таким образом, $2I=1+e^{\pi/2}$, откуда $I=(1+e^{\pi/2})/2$.

4⁰. Приближенные методы вычисления определенных интегралов. На практике часто приходится применять интегралы, вычисление которых по формуле Ньютона — Лейбница либо затруднительно, либо невозможно. Рассмотрим приближенное вычисление определенного интеграла методом прямоугольников и методом трапеций.

Пусть требуется вычислить определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Для определенности будем считать, что $f(x)\geqslant 0$ $\forall x\in[a, b]$ (рис. 11) и всюду на $[a, b]$ функция возрастает [в противном случае всегда можно выделить интервалы знакопостоянства и возрастания или убывания функции $f(x)$]. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей длины $\Delta x=(b-a)/n$. Абсциссы точек деления таковы: $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$. Пусть $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n$ — соответствующие им ординаты графика функции. Тогда расчетные формулы для этих значений примут вид

$$x_k=x_0+k\Delta x,\ \ y_k=f(x_k),\ \ k=1,\ldots, n;\ \ \Delta x=\frac{b-a}{n}. \tag{6}$$

Таким образом, криволинейная трапеция разбита на n полос, каждая из которых приближенно принята за прямоугольник. Если выбрать в качестве высоты прямоугольника правую ординату каждой полосы, то площадь k-го прямоугольника равна $y_k\Delta x$, а площадь всех n прямоугольников составит

$$S_1=\sum_{k=1}^{n} y_k\Delta x=\frac{b-a}{n}(y_1+y_2+\ldots+y_n). \tag{7}$$

Из геометрических соображений естественно считать, что

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx\approx S_1. \tag{8}$$

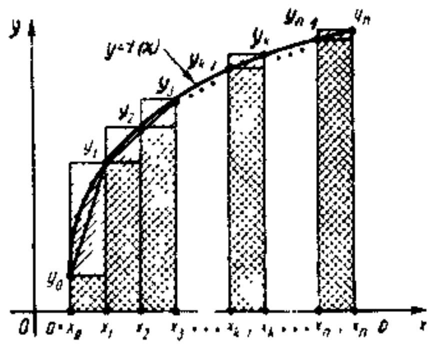


Рис 11

На рис. 11 видно, что площадь соответствующей ступенчатой фигуры S_1 больше площади криволинейной трапеции, поэтому формула (8) называется *формулой прямоугольников с избытком*. В том случае, когда функция $f(x)$ убывает на отрезке $[a, b]$, формула (8) дает приближенное значение определенного интеграла с недостатком.

Если в качестве высоты каждого прямоугольника выбрать левую ординату, то площадь k-го прямоугольника равна $y_{k-1}\Delta x$, а площадь всей ступенчатой фигуры составит

$$S_2=\sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\Delta x=\frac{b-a}{n}(y_0+y_1+\dots+y_{n-1}). \qquad (9)$$

Тогда получим *формулу прямоугольников с недостатком*:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\approx S_2. \qquad (10)$$

В случае убывания функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ формула (10) дает значение определенного интеграла с избытком.

Так как формулы (8) и (10) дают значение определенного интеграла $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ соответственно с избытком или с недостатком, то для большей точности естественно считать, что

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\approx S_3=\frac{S_1+S_2}{2}\ . \qquad (11)$$

Формула (11) называется *формулой трапеций*, поскольку аналогичный результат получается, если сразу заменить площадь каждой k-й полосы площадью трапеции с основаниями y_{k-1} и y_k и высотой Δx (рис. 11). Тогда площадь k-й трапеции равна $\frac{\Delta x}{2}(y_{k-1}+y_k)$, а площадь всех n трапеций составит

$$S_3=\sum_{k=1}^{n}\frac{y_{k-1}+y_k}{2}\Delta x=\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+\dots+y_{n-1}+\frac{y_n}{2}\right). \qquad (12)$$

Точно такой же результат получится, если сложить равенства (7) и (9) и разделить сумму пополам.

Из геометрических соображений ясно, что формула трапеций (11) дает лучший результат, чем формулы прямоугольников (8) или (10).

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_1^5 x^2\,dx$ приближенно по формулам прямоугольников и трапеций и сравнить результаты вычислений с точным значением интеграла, полученным по формуле Ньютона — Лейбница (разбить отрезок интегрирования на $n=8$ частей).

Решение. По формуле Ньютона — Лейбница получим

$$\int_1^5 x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Bigg|_1^5=\frac{124}{3}=41,33. \qquad (*)$$

Разобьем отрезок интегрирования [1, 5] на $n=8$ частей, тогда $\Delta x=(b-a)/n=(5-1)/8=0,5$. Абсциссы точек деления и соответствующие им ординаты вычислим по формулам (6):

k	$x_k=x_0+k\Delta x$	$y_k=x_k^2$
0	1	1
1	1,5	2,25
2	2	4
3	2,5	6,25
4	3	9
5	3,5	12,25
6	4	16
7	4,5	20,25
8	5	25

Используя формулы (7) и (8), находим

$$\int_1^5 x^2\,dx\approx 0,5(2,25+4+6,25+9+12,25+16+20,25+25)=$$
$$=0,5\cdot 95=47,50.$$

Сравнивая результат с точным значением интеграла (*), видим, что получено его значение с избытком, так как функция x^2 возрастает при $x\in[1, 5]$.

Используя теперь формулы (9) и (10), имеем

$$\int_1^5 x^2\,dx\approx 0,5(95-25+1)=35,50.$$

Сравнивая результат с точным значением интеграла (*), видим, что найдено его значение с недостатком.

Наконец, по формулам (11) и (12) получим

$$\int_{3}^{5} x^2\,\mathrm{d}x \approx \frac{47,50+35,50}{2} = 41,50.$$

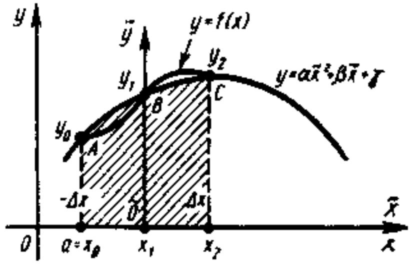


Рис. 12

Таким образом, формула трапеций дает более близкий к точному значению (*) результат, нежели формулы прямоугольников.

При выводе формулы трапеций мы заменяли график функции $f(x)$ на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ разбиения отрезком прямой, проходящей через точки с ординатами y_{k-1} и y_k. Более точный результат получится, если заменять соответствующие дуги кривой $y=f(x)$ кусками парабол. В этом и состоит сущность метода парабол (метода Симпсона).

Разобьем отрезок интегрирования на четное число частей $n=2m$ (см. рис. 11). Полосы, на которые разбита вся криволинейная трапеция, будем рассматривать попарно. Рассмотрим первые две полосы, изобразив их укрупненно на рис. 12. Перенесем ось Oy параллельно самой себе в точку $(x_1, 0)$. Ясно, что новые ординаты $\tilde{y}$ всех точек совпадут со старыми ординатами y, а абсциссы изменятся. Обозначив $\Delta x=(b-a)/(2m)$, получим новые абсциссы $\tilde{x}$ точек деления отрезка $[a, b]$, которые укажем над осью $Ox(O\tilde{x})$. Ясно, что при таком переносе системы координат площади рассматриваемых фигур не изменятся. Будем считать, что площадь криволинейной трапеции $x_0y_0y_2x_2$ приближенно равна площади под параболой $y=\alpha\tilde{x}^2+\beta\tilde{x}+\gamma$, проходящей через точки $A(-\Delta x, y_0)$, $B(0, y_1)$, $C(\Delta x, y_2)$ (на рис. 12 она заштрихована), т. е.

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_{-\Delta x}^{\Delta x} (\alpha\tilde{x}^2+\beta\tilde{x}+\gamma)\,\mathrm{d}\tilde{x} = \left(\frac{\alpha\tilde{x}^3}{3}+\frac{\beta\tilde{x}^2}{2}+\gamma\tilde{x}\right)\Bigg|_{-\Delta x}^{\Delta x} =$$

$$= \frac{\Delta x}{3}\left(2\alpha(\Delta x)^2+6\gamma\right). \tag{13}$$

Так как парабола проходит через точки A, B, C, то, подставляя в ее уравнение вместо $\tilde{x}$ последовательно $-\Delta x$, 0, Δx, получим

$$y_0=\alpha(\Delta x)^2-\beta\,\Delta x+\gamma;\quad y_1=\gamma;\quad y_2=\alpha(\Delta x)^2+\beta\,\Delta x+\gamma. \tag{14}$$

Умножая второе из равенств (14) на 4 и складывая почленно все три равенства, имеем

$$y_0+4y_1+y_2=2\alpha(\Delta x)^2+6\gamma. \tag{15}$$

На основании равенств (13) и (15) получим *формулу Симпсона для двух полос*:

$$\int_{x_0=a}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{\Delta x}{3}(y_0+4y_1+y_2). \tag{16}$$

Точно так же для двух последующих полос находим

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{\Delta x}{3}(y_2+4y_3+y_4). \tag{17}$$

Продолжая аналогично, запишем формулу для двух последних полос:

$$\int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}=b} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{\Delta x}{3}(y_{2m-2}+4y_{2m-1}+y_{2m}). \tag{18}$$

Складывая соотношения (16), (17) и (18) почленно, получим *формулу Симпсона для 2m полос*:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6m}\left(y_0+y_{2m}+4\sum_{k=1}^{m} y_{2k-1}+2\sum_{k=1}^{m-1} y_{2k}\right). \tag{19}$$

Пример 2. Вычислить интеграл из примера 1 по формуле Симпсона.

Решение. Здесь $n=2m=8$, откуда $m=4$. Формула (19) для восьми полос имеет вид

$$\int_1^5 x^2\,\mathrm{d}x \approx \frac{5-1}{6\cdot 4}[y_0+y_8+4(y_1+y_3+y_5+y_7)+2(y_2+y_4+y_6)].$$

Учитывая данные таблицы на с. 78, получим

$$\int_1^5 x^2\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{6}[1+25+4(2{,}25+6{,}25+12{,}25+20{,}25)+$$

$$+2(4+9+16)]=41{,}33,$$

что совпадает с точным значением интеграла. Это всегда имеет место, если подынтегральная функция является квадратичной.

В примерах 1 и 2 число n было задано в условии. На практике число n определяется исходя из необходимой точности вычислений.

Для оценки точности формулы трапеций обозначим через $R_n{}^{\text{т}}$ разность между левой и правой частями формулы (11). Абсолютная величина этой разности называется абсолютной погрешностью.

Если подынтегральная функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную вторую производную, то для абсолютной погрешности формулы (11) справедлива оценка

$$|R_n^{т}| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2, \tag{20}$$

где M_2 — максимум модуля второй производной подынтегральной функции на отрезке $[a, b]$.

Аналогично, для оценки точности формулы Симпсона для $2m$ полос рассмотрим разность $R_n^{с}$. Если подынтегральная функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную четвертую производную, то для абсолютной погрешности формулы (19) справедлива оценка

$$|R_n^{с}| \leqslant \frac{(b-a)^5}{180\,(2m)^4} M_4, \tag{21}$$

где M_4 — максимум модуля четвертой производной подынтегральной функции на отрезке $[a, b]$.

Сравнивая оценки (20) и (21), замечаем, что погрешность формулы трапеций уменьшается с увеличением n пропорционально $1/n^2$, а для формулы Симпсона — пропорционально $1/(2m)^4 = 1/n^4$, т. е. при одном и том же n формула Симпсона дает меньшую погрешность, чем формула трапеций.

Примеры. 3. Вычислить интеграл из примера 1 по формуле трапеций с точностью до 0,2.

Решение. Абсолютная погрешность результата не должна превосходить 0,2, т. е. $|R_n^{т}| \leqslant 0{,}2$. Находим вторую производную функции $y = x^2$; получим $y' = 2x$, $y'' = 2$. Следовательно, $M_2 = 2$. В силу неравенства (20) имеем $|R_n^{т}| \leqslant \frac{(5-1)^3}{12n^2} \cdot 2 \leqslant 0{,}2$, откуда $n^2 \geqslant \geqslant \frac{32}{3 \cdot 0{,}2}$ или $n^2 \geqslant 53{,}33$, т. е. $n \geqslant 7{,}30$. Таким образом, если все значения y_k в таблице на с. 78 точные, то для вычисления значения интеграла с заданной точностью достаточно выбрать $n = 8$. Используя результаты примера 1, находим

$$|R_n^{т}| = \left| \int_1^5 x^2\,dx - S_3 \right| = \left| 41{,}33 - 41{,}5 \right| = 0{,}17 < 0{,}2.$$

4. По формуле Симпсона при $n = 10$ найдено приближенное значение интеграла $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx 0{,}74682$. Определить, сколько десятичных знаков этого числа являются верными*, если все расче-

* Все десятичные знаки приближенного числа считаются верными, если абсолютная погрешность не превосходит пяти единиц первого отброшенного разряда

ты ведутся с пятью верными знаками.

Решение. Оценим погрешность формулы Симпсона. Дифференцируя последовательно функцию $y=e^{-x^2}$, находим четвертую производную $y^{IV}=4e^{-x^2}(4x^4-12x^2+3)$. Для этой производной определяем экстремумы на отрезке $[0, 1]$ и ее значения на концах отрезка: $y^{IV}(0{,}96)=y_{\min}\approx-8{,}25921$, $y^{IV}(0)=12$, $y^{IV}(1)\approx-7{,}18623$. Очевидно, что наибольшее значение модуля четвертой производной есть $M_4=|y^{IV}(0)|=12$. В силу оценки (21) имеем $|R_n^c|\leqslant \leqslant \frac{(1-0)^5}{180\cdot 10^4}\cdot 12<0{,}7\cdot 10^{-5}$.

Оценим погрешность округления. Согласно условию, вычисления проводятся так, что погрешность каждого приближенного значения y_k не превосходит пяти единиц шестого разряда, т. е. $\Delta(y_k)\leqslant \leqslant 0{,}5\cdot 10^{-5}$. Погрешность суммы в формуле (19) составит $0{,}5\cdot 10^{-5}+ +4\cdot 5\cdot 0{,}5\cdot 10^{-5}+2\cdot 4\cdot 0{,}5\cdot 10^{-5}=29\cdot 0{,}5\cdot 10^{-5}$, так как значение $y_0= =e^0=1$ является точным. Перед суммой стоит множитель $(b-a)/(6m)=1/30$. Учитывая погрешность округления результата после деления (она не превосходит $0{,}5\cdot 10^{-5}$), получим погрешность округления

$$\Delta=\frac{29}{30}\cdot 0{,}5\cdot 10^{-5}+0{,}5\cdot 10^{-5}\approx 0{,}98\cdot 10^{-5}<10^{-5}.$$

Складывая погрешности Δ и $|R_n{}^c|$, получим погрешность вычислений

$$\Delta+|R_n^c|=10^{-5}+0{,}7\cdot 10^{-5}=1{,}7\cdot 10^{-5}<5\cdot 10^{-5}.$$

Следовательно, число 0,74682 содержит четыре верных десятичных знака. Отбросив пятый сомнительный знак, получим $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx\approx \approx 0{,}7468$ с абсолютной погрешностью $(1{,}7+2)10^{-5}=3{,}7\cdot 10^{-5}< <5\cdot 10^{-5}$.

5^0. Упражнения

Вычислите определенные интегралы:

1. $\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$. 2. $\int\limits_{\pi/8}^{\pi/6}\frac{dx}{\cos^2 2x}$. 3. $\int\limits_1^4\frac{dx}{(1+\sqrt{x})^2}$. 4. $\int\limits_0^1\frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$.

5. $\int\limits_1^5\frac{x\,dx}{\sqrt{4x+5}}$. 6. $\int\limits_1^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\,dx$. 7. $\int\limits_0^{\pi/2}x\sin x\,dx$. 8. $\int\limits_0^{\pi/4}\operatorname{tg}^3 x\,dx$.

9. $\int\limits_0^{\pi/4}\frac{x\sin x}{\cos^3 x}\,dx$. 10. $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{2\cos x+3}$. 11. $\int\limits_0^{e-1}\ln(x+1)\,dx$.

12. $\int\limits_0^1 \arcsin^4 x\,dx$. **13.** $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{1+x^2}\,dx$. **14.** $\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\,dx$.

15. По формуле трапеций вычислите приближенно интеграл $I=\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, полагая $n=10$, и сравните результат с точным значением интеграла, полученным по формуле Ньютона — Лейбница.

16. По формуле Симпсона вычислите приближенно интеграл $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx$, полагая $n=10$.

17. Проверьте, достаточно ли выбрать $n=10$ для вычисления интеграла из упр. 15 с точностью до 0,005.

§ 2.4. Приложение интегралов к вычислению площадей плоских фигур, длин дуг кривых, объемов тел и площадей поверхностей вращения

1°. Вычисление площадей в прямоугольных координатах. Как известно (см. п. 3° § 2.1), площадь криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной линией $y=f(x)$ и прямыми $x=a$, $x=b$, $y=0$, находится по формуле

$$S=\int\limits_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

где $f(x)\geqslant 0$ и $x\in[a, b]$ (рис. 13).

Если $f(x)\leqslant 0$, $x\in[a, b]$, то определенный интеграл (1) неположителен. Его абсолютная величина равна площади криволинейной трапеции $aABb$, расположенной ниже оси Ox (рис. 14), т. е. $S=-\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Если же функция $f(x)$ меняет знак на отрезке $[a, b]$ конечное число раз (см. рис. 2), то для вычисления площади фигуры можно

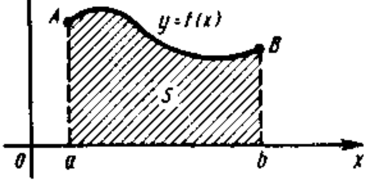


Рис. 13

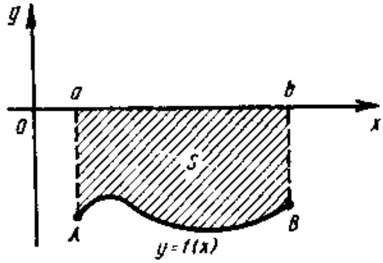


Рис. 14

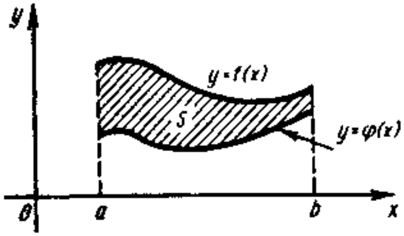


Рис. 15

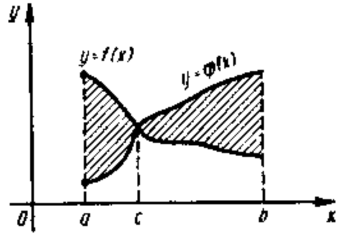


Рис 16

разбить отрезок интегрирования на части, где $f(x)$ не меняет знака, а затем найти по формуле (1) площади фигур, полученных таким образом, и взять их алгебраическую сумму (см. п. 3° § 2.1).

Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной косинусоидой $y=\cos x$ и прямыми $x=0$, $x=\pi$, $y=0$.

Решение. Разобьем отрезок $[0, \pi]$ на такие части, где функция $y=\cos x$ сохраняет постоянный знак. Поскольку $y \geqslant 0$ при $x \in [0, \pi/2]$ и $y \leqslant 0$ при $x \in [\pi/2, \pi]$, имеем

$$S=\int_0^{\pi/2} \cos x\,\mathrm{d}x-\int_{\pi/2}^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x=\sin x \Big|_0^{\pi/2}-\sin x \Big|_{\pi/2}^{\pi}=1-(-1)=2.$$

Найдем площадь фигуры, заключенной между двумя кривыми $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$ при $x \in [a, b]$ (рис. 15). Пусть для определенности $f(x)>\varphi(x)$ при $x \in [a, b]$. Тогда площадь S равна разности площадей криволинейных трапеций, ограниченных сверху соответственно графиками функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, т. е.

$$S=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b [f(x)-\varphi(x)]\,\mathrm{d}x. \qquad (2)$$

Если графики функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ пересекаются на отрезке $[a, b]$ конечное число раз (рис. 16), то отрезок интегрирования следует разбить на такие части, где разность $f(x)-\varphi(x)$ сохраняет постоянный знак, и найти площади полученных частей по формуле (2). Например, площадь фигуры, заштрихованной на рис. 16, равна

$$S=\int_a^c [f(x)-\varphi(x)]\,\mathrm{d}x+\int_c^b [\varphi(x)-f(x)]\,\mathrm{d}x=\int_a^b | f(x)-\varphi(x) |\,\mathrm{d}x.$$

Примеры. 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^3$, $y=x^2$, $x=-1$, $x=1$ (рис. 17).

Решение. На отрезке $[-1, 1]$ график функции $y=x^2$ лежит не ниже графика функции $y=x^3$. По формуле (2) находим

$$S=\int_{-1}^{1}(x^2-x^3)\,\mathrm{d}x=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{2}{3}.$$

3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2=2x+1$ и $x-y-1=0$ (рис. 18).

Решение. Первая линия представляет собой параболу с осью симметрии Ox и вершиной A $(-1/2, 0)$, а вторая — прямую, имеющую с параболой две общие точки B $(0, -1)$ и C $(4, 3)$. Разобьем фигуру на три части и обозначим через S_1 площадь параболического сектора AOD, а через S_2 — площадь параболического треугольника BCD. Площадь параболического сектора AOB в силу симметрии равна S_1. Тогда, используя формулы (1) и (2), получим

$$S=2S_1+S_2=2\int_{-1/2}^{0}\sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{4}[\sqrt{2x+1}-(x-1)]\,\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{(2x+1)^3}\,\Bigg|_{-1/2}^{0}+\left(\frac{1}{3}\sqrt{(2x+1)^3}-\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{0}^{4}=\frac{16}{3}.$$

Заметим, что иногда вычисления значительно упрощаются, если поменять ролями оси Ox и Oy; тогда аргументом является y и формулы (1) и (2) соответственно примут вид

$$S=\int_{a}^{b}f(y)\,\mathrm{d}y,\quad S=\int_{a}^{b}[f(y)-\varphi(y)]\,\mathrm{d}y.$$

Так, в рассмотренном примере при интегрировании по y нет необходимости разбивать на части фигуру, изображенную на рис. 18. Имеем

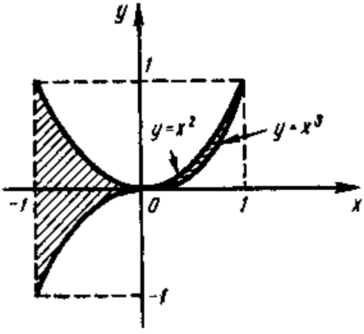


Рис. 17

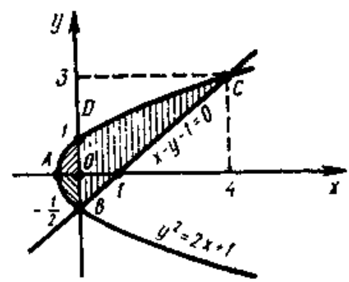


Рис. 18

$$S=\int\limits_{-1}^{3}\left[y+1-\frac{y^2-1}{2}\right]\mathrm{d}y=\left(\frac{y^2}{2}+y-\frac{y^3}{6}+\frac{y}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{3}=\frac{16}{3}.$$

2°. Вычисление площади криволинейной трапеции для кривой, заданной параметрически. Пусть кривая задана параметрическими уравнениями

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta, \tag{3}$$

где функция $\psi(t)$ непрерывна, а $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема. Пусть, далее, уравнения (3) определяют интегрируемую функцию $y=f(x)$ на отрезке $[a, b]$ так, что различным $t\in[\alpha, \beta]$ соответствуют различные точки кривой $y=f(x)$, которая сама себя не пересекает, причем $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y=f(x)$ и прямыми $x=a$, $x=b$, определяется по формуле (1). Выполним в формуле (1) подстановку $x=\varphi(t)$; имеем $y=f(x)=f(\varphi(t))=\psi(t)$, $\mathrm{d}x=\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$; если $x=a$, то $t=\alpha$; если $x=b$, то $t=\beta$. Тогда формула (1) примет вид

$$S=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{4}$$

Примеры. 1. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом (рис. 19).

Решение. Параметрические уравнения эллипса имеют вид $x=a\cos t$, $y=b\sin t$. В силу симметрии эллипса достаточно найти площадь S_1 одной его четверти, а затем умножить результат на 4. Если x изменяется в пределах $[0, a]$, то параметр t изменяется в пределах от $\pi/2$ до 0. По формуле (4) получим

$$S=4S_1=4\int\limits_{\pi/2}^{0}(b\sin t)(-a\sin t)\,\mathrm{d}t=4ab\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin^2 t\,\mathrm{d}t=$$

$$=2ab\int\limits_{0}^{\pi/2}(1-\cos 2t)\,\mathrm{d}t=2ab\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{0}^{\pi/2}=\pi ab.$$

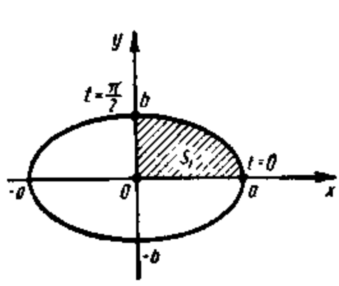


Рис. 19

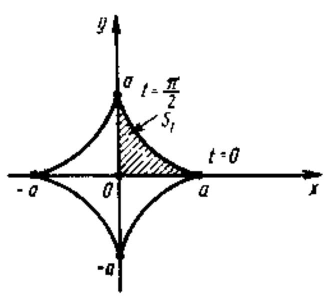


Рис. 20

2. Найти площадь, ограниченную астроидой $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ (рис. 20).

Решение. Используя формулу (4), находим

$$S=4S_1=4\int_{\pi/2}^{0} a\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t\times$$

$$\times(-\sin t)\,dt=12a^2\int_0^{\pi/2}\sin^4 t\cos^2 t\,dt=$$

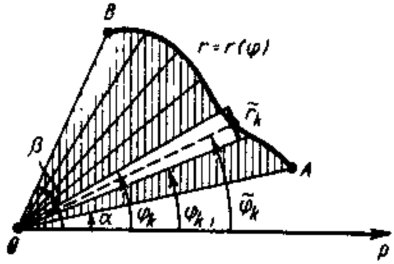


Рис. 21

$$=\frac{3}{2}a^2\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2t)(1-\cos^2 2t)\,dt=\frac{3\pi a^2}{8}.$$

3⁰. Вычисление площадей в полярных координатах. Пусть в полярной системе координат задана функция $r=r(\varphi)$, где r — полярный радиус, φ — полярный угол. Пусть, далее, функция $r(\varphi)$ непрерывна при изменении угла φ в пределах $\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta$. Фигура, ограниченная частью AB графика функции $r(\varphi)$ и прямыми, соединяющими полюс O с точками A и B, называется *криволинейным сектором* (рис. 21).

Вычислим площадь криволинейного сектора OAB. Разобьем угол $\beta-\alpha$ на n частей лучами, соответствующими значениям полярного угла $\varphi_0=\alpha<\varphi_1<\varphi_2<\ldots<\varphi_{n-1}<\varphi_n=\beta$. Обозначим углы между проведенными лучами через $\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2, \ldots, \Delta\varphi_n$. Для k-го угла имеем $\Delta\varphi_k=\varphi_k-\varphi_{k-1}$. Ясно, что площадь криволинейного сектора OAB равна сумме площадей n малых секторов, его составляющих. Рассмотрим криволинейный сектор, соответствующий k-му углу $\Delta\varphi_k$. Выберем некоторый угол $\tilde\varphi_k$, удовлетворяющий неравенствам $\varphi_{k-1}\leqslant\tilde\varphi_k\leqslant\varphi_k$, и обозначим длину соответствующего этому углу радиуса через $\tilde r_k$. Заменим площадь k-го криволинейного сектора площадью кругового сектора с радиусом $\tilde r_k$ и центральным углом $\Delta\varphi_k$. Его площадь равна $\Delta s_k=\frac{1}{2}\tilde r_k^2\Delta\varphi_k$. Так как $\tilde r_k=r(\tilde\varphi_k)$, то площадь k-го кругового сектора вычисляется по формуле $\Delta s_k=\frac{1}{2}r^2(\tilde\varphi_k)\,\Delta\varphi_k$. Сумма площадей n круговых секторов составит

$$S_n=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}r^2(\tilde\varphi_k)\,\Delta\varphi_k. \tag{5}$$

Сумма S_n является интегральной суммой Римана для функции $r^2(\varphi)$ на отрезке $[\alpha,\beta]$. Переходя в равенстве (5) к пределу при $\max\limits_k\Delta\varphi_k=d\to 0$ (а значит, и $n\to\infty$), получим

$$\lim_{d\to 0} S_n = \frac{1}{2} \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} r^2(\tilde{\varphi}_k)\,\Delta\varphi_k. \tag{6}$$

В равенстве (6) левая часть есть площадь S криволинейного сектора OAB, а правая часть в силу определения 2 § 2.1 равна определенному интегралу $\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi$. Таким образом, соотношение (6) примет вид

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi. \tag{7}$$

Примеры. 1. Найти площадь круга радиуса R.

Решение. Уравнение окружности в полярных координатах имеет вид $r = R$. В силу центральной симметрии круга достаточно вычислить площадь S_1 четверти круга, а затем умножить результат на 4. Полярный угол, соответствующий площади S_1, изменяется в пределах $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$. По формуле (7) находим

$$S = 4S_1 = 2\int\limits_0^{\pi/2} R^2\,d\varphi = 2R^2\varphi\,\Big|_0^{\pi/2} = \pi R^2,$$

что согласуется с общеизвестной формулой.

2. Найти площадь, ограниченную лемнискатой $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Решение. Фигура, ограниченная лемнискатой (рис. 22), симметрична относительно горизонтальной и вертикальной прямых, проходящих через полюс; поэтому достаточно вычислить площадь S_1 четверти фигуры. Этой площади соответствует центральный угол $\varphi \in [0, \pi/4]$. По формуле (7) получим

$$S = 4S_1 = 4\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4} a^2\cos 2\varphi\,d\varphi = 2a^2\int\limits_0^{\pi/4}\cos 2\varphi\,d\varphi = a^2\sin 2\varphi\,\Big|_0^{\pi/4} = a^2.$$

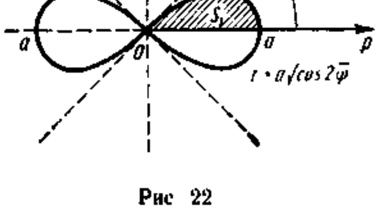


Рис 22

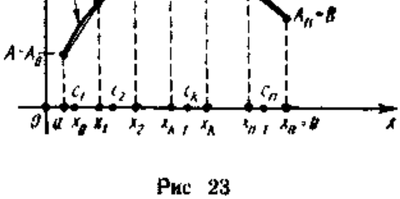


Рис 23

4°. Вычисление длины дуги плоской кривой в декартовых координатах. Введем понятие длины дуги. Пусть на плоскости дана кривая, являющаяся графиком непрерывной функции $y=f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей точками $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$. Из каждой точки x_k восставим перпендикуляр к оси Ox; тогда дуга AB разобьется на n частей точками $A_0=A, A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n=B$ (рис. 23). Заменим каждый участок дуги $A_{k-1}A_k$ отрезком прямой $A_{k-1}A_k$.

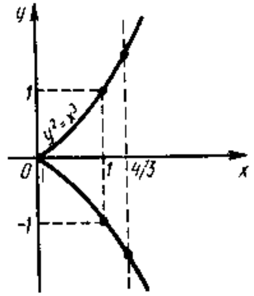


Рис 24

Определение 1. Длиной дуги AB называется предел L, к которому стремится длина ломаной $A_0A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n$, вписанной в дугу AB, при стремлении к нулю наибольшей из ее сторон $\Delta l=\max\limits_k A_{k-1}A_k \to 0$, а значит, и при $n\to\infty$, т. е.

$$L=\lim_{\Delta l\to 0}\sum_{k=1}^{n} A_{k-1}A_k. \tag{8}$$

Пусть функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$. Согласно теореме Пифагора, имеем $A_{k-1}A_k=\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+(A_kx_k-A_{k-1}x_{k-1})^2}$. Обозначим $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$. Так как $A_kx_k=f(x_k)$ и $A_{k-1}x_{k-1}=f(x_{k-1})$, то на основании теоремы Лагранжа получим

$$(A_kx_k-A_{k-1}x_{k-1})=f(x_k)-f(x_{k-1})=f'(c_k)\Delta x_k,\ c_k\in\,]\,x_{k-1},\ x_k\,[\,.$$

Тогда

$$A_{k-1}A_k=\sqrt{(\Delta x_k)^2+[f'(c_k)]^2(\Delta x_k)^2}=\sqrt{1+[f'(c_k)]^2}\,\Delta x_k.$$

Вследствие непрерывности производной $f'(x)$ существует предел (8) интегральной суммы при $d=\max\limits_k \Delta x_k\to 0$, а значит, и при $\Delta l\to 0$. Таким образом,

$$L=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+[f'(c_k)]^2}\,\Delta x_k. \tag{9}$$

В силу определения 2 § 2.1 предел (9) равен определенному интегралу от функции $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ на отрезке $[a, b]$:

$$L=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx. \tag{10}$$

Это и есть формула для вычисления длины L дуги AB.

Пример. Найти длину дуги кривой $y^2=x^3$, отсеченной прямой $x=4/3$ (рис. 24).

Решение. Найдем производную функции $y=f(x)$, заданной неявно соотношением $y^2=x^3$; имеем $2yy'=3x^2$, откуда $(y')^2=\frac{9}{4}x$. В силу симметрии кривой достаточно вычислить длину L_1 ее половины. По формуле (10) получим

$$L=2L_1=2\int_0^{4/3}\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{16}{9}\int_1^2 t^2\,dt=\frac{16}{27}t^3\Big|_1^2=\frac{112}{27}$$

$\left(\text{здесь использована подстановка } \sqrt{1+\frac{9}{4}x}=t\right)$.

5°. Вычисление длины дуги плоской кривой, заданной в параметрической форме. Рассмотрим параметрически заданную кривую $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — непрерывные на $[\alpha, \beta]$ функции, имеющие непрерывные производные, причем $\varphi'(t)\neq 0$ $\forall t\in[\alpha, \beta]$. Пусть $a=\varphi(\alpha)$ и $b=\varphi(\beta)$. В интеграле (10) произведем подстановку $x=\varphi(t)$, $dx=\varphi'(t)\,dt$; так как $y'=\psi'(t)/\varphi'(t)$, то получим

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]^2}\varphi'(t)\,dt=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt. \qquad (11)$$

Примеры. 1. Найти длину окружности радиуса R.

Решение. Уравнения окружности в параметрической форме имеют вид $x=R\cos t$, $y=R\sin t$. Найдем четвертую часть L_1 длины окружности. По формуле (11) имеем

$$L=4L_1=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{(-R\sin t)^2+(R\cos t)^2}\,dt=4Rt\Big|_0^{\pi/2}=2\pi R,$$

что согласуется с общеизвестным результатом.

2. Найти длину одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ (рис. 25).

Решение. Имеем $x'=a(1-\cos t)$, $y'=a\sin t$. По формуле (11) получим

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=a\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}\,dt=$$

$$=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=4a\cos\frac{t}{2}\Big|_{2\pi}^{0}=8a.$$

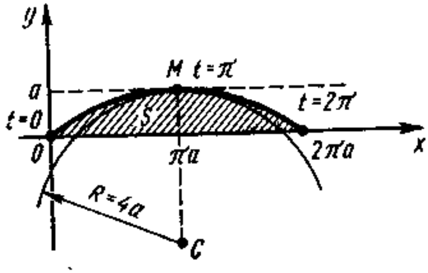


Рис. 25

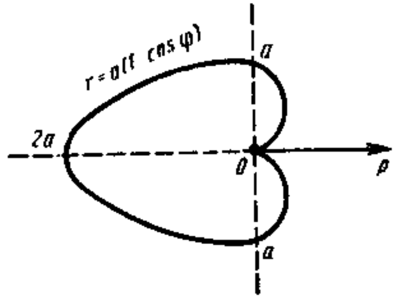


Рис. 26

6°. Вычисление длины дуги плоской кривой в полярных координатах. Пусть кривая задана уравнением в полярных координатах $r=r(\varphi)$, где функция $r(\varphi)$ и ее производная $r'(\varphi)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$. Воспользуемся формулами перехода от полярных координат к декартовым: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Учитывая, что полярный радиус r есть функция полярного угла φ, получим уравнения $x=r(\varphi)\cos\varphi$, $y=r(\varphi)\sin\varphi$, которые можно рассматривать как параметрические уравнения кривой при изменении параметра φ в пределах $\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta$. Тогда по формуле (11) находим

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(r'(\varphi)\cos\varphi-r(\varphi)\sin\varphi)^2+(r'(\varphi)\sin\varphi+r(\varphi)\cos\varphi)^2}\,d\varphi,$$

откуда

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[r'(\varphi)]^2+[r(\varphi)]^2}\,d\varphi. \tag{12}$$

Пример. Найти длину кардиоиды $r=a(1-\cos\varphi)$ (рис. 26).

Решение. В силу симметрии кривой достаточно вычислить длину L_1 ее половины. Имеем

$$L=2L_1=2\int_{\pi}^{0}\sqrt{a^2\sin^2\varphi+a^2(1-\cos\varphi)^2}\,d\varphi=$$

$$=4a\int_{\pi}^{0}\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}\,d\varphi=4a\int_{\pi}^{0}\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=8a\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_{\pi}^{0}=8a.$$

7°. Вычисление объема тела по известным площадям поперечных сечений. Пусть для некоторого тела (рис. 27) известна площадь S любого поперечного сечения. Очевидно, что эта площадь зависит от положения секущей плоскости, т. е. является функцией от x; зна-

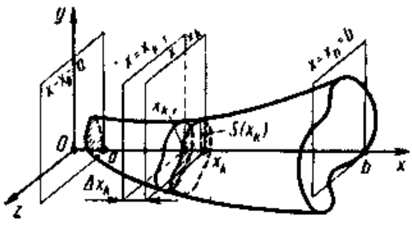


Рис. 27

чит, $S=S(x)$, где $S(x)$ — непрерывная на $[a, b]$ функция. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей точками $a=x_0<x_1<<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$. Через каждую k-ю точку проведем секущую плоскость $x=x_k$, перпендикулярную оси Ox. Эти плоскости рассекут тело на слои. Выберем на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ промежуточную точку c_k и заменим каждый слой цилиндром с образующей, параллельной оси Ox, и направляющей, соответствующей контуру сечения тела плоскостью $x=c_k$. Объем каждого цилиндра с площадью основания $S(c_k)$ и высотой $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$ равен $S(c_k)\Delta x_k$, а объем всего ступенчатого тела равен сумме объемов всех цилиндров. Так как функция $S(x)$ непрерывна, то существует конечный предел

$$V=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} S(c_k)\Delta x_k, \qquad (13)$$

где $d=\max\limits_k \Delta x_k$, который и называется *объемом тела* V. В силу определения 2 § 2.1 предел (13) равен определенному интегралу от функции $S(x)$ на отрезке $[a, b]$:

$$V=\int_a^b S(x)\,dx. \qquad (14)$$

Пример. Найти объем конуса с радиусом основания R и высотой h.

Решение. Расположим конус так, чтобы его ось симметрии совпадала с осью Ox, а вершина — с началом координат (рис. 28). Найдем зависимость между абсциссой x, через которую проходит поперечное сечение, и его площадью $S(x)$. В силу подобия тре-

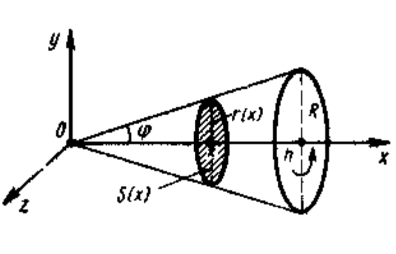


Рис. 28

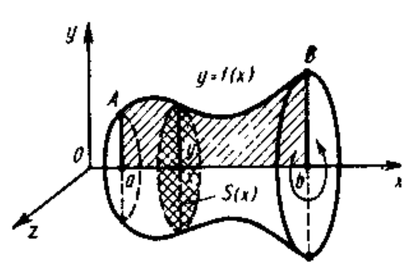


Рис. 29

угольников имеем $\frac{r(x)}{R}=\frac{x}{h}$, где $r(x)$ — радиус сечения конуса плоскостью, соответствующей абсциссе x. Отсюда $r(x)=\frac{R}{h}x$. Так как сечением конуса поперечной плоскостью является круг, то площадь сечения $S(x)=\pi r^2(x)=\pi R^2\frac{x^2}{h^2}$. По формуле (14) получим

$$V=\int_0^h \pi R^2\frac{x^2}{h^2}\,dx=\frac{\pi R^2}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^h=\pi R^2\frac{h}{3},$$

что согласуется с общеизвестной формулой.

8⁰. Вычисление объема тела вращения. Пусть криволинейная трапеция, ограниченная графиком непрерывной функции $y=f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$, $x=b$, вращается вокруг оси Ox (рис. 29). Найдем объем V полученного тела вращения. Ясно, что произвольное поперечное сечение этого тела представляет собой круг. Площадь круга, образованного при сечении тела вращения плоскостью $x=x$, есть $S(x)=\pi y^2=\pi f^2(x)$. Тогда по формуле (14) получим

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{15}$$

Заметим, что формула (14) является более общей, чем (15), так как по формуле (14) можно вычислять не только объемы тел вращения.

Если криволинейная трапеция, ограниченная непрерывной функцией $x=\varphi(y)$ осью Oy и прямыми $y=a$ и $y=b$, вращается вокруг оси Oy, то объем V полученного тела вычисляется по формуле

$$V=\pi\int_a^b \varphi^2(y)\,dy. \tag{16}$$

Примеры. 1. Найти объем конуса с радиусом основания R и высотой h.

Р е ш е н и е. Конус можно считать телом, полученным вращением прямоугольного треугольника с катетами h и R относительно оси Ox (см. рис. 28). Найдем уравнение гипотенузы этого треугольника. Имеем $y=kx$, где $k=\operatorname{tg}\varphi=R/h$, т. е. $y=Rx/h$. По формуле (15) получим

$$V=\pi\int_0^h y^2\,dx=\pi\int_0^h\frac{R^2}{h^2}x^2\,dx=\pi R^2\frac{h}{3}.$$

Сравните это решение с решением примера п. 7⁰.

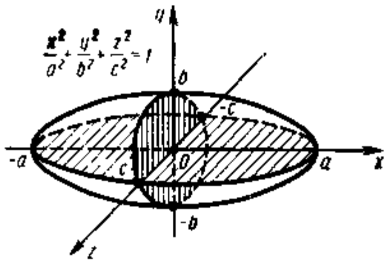


Рис 30

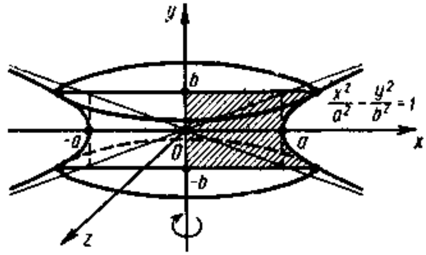


Рис 31

2. Найти объем трехосного эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (рис. 30).

Решение. В общем случае при $a \neq b \neq c$ трехосный эллипсоид нельзя считать телом вращения. Следовательно, его объем V нужно вычислять с помощью формулы (14). Поперечные сечения эллипсоида являются эллипсами, уравнения которых имеют вид

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}, \text{ или } \frac{y^2}{\left[b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]^2}+\frac{z^2}{\left[c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]^2}=1.$$

Отсюда ясно, что полуоси эллиптического сечения плоскостью $x=x$ равны соответственно $b(x)=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, $c(x)=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. Известно, что площадь эллипса с полуосями b и c вычисляется по формуле $S=\pi bc$ (см. пример 1 п. 2°). Следовательно, площадь любого поперечного сечения равна $S(x)=\pi b(x)c(x)$. Теперь по формуле (14) находим

$$V=\pi\int_{-a}^{a} b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\, c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x=\pi bc\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi abc.$$

В частности, при $a=b=c=R$ трехосный эллипсоид вырождается в шар, объем которого $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

3. Найти объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=\pm b$ и $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, вокруг оси Oy (рис. 31).

Решение. В силу симметрии тела вращения относительно плоскости xOz достаточно вычислить половину V_1 всего объема тела. По формуле (16) получим

$$V=2V_1=2\pi\int_0^b x^2\,\mathrm{d}y=2\pi a^2\int_0^b\left(1+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}y=2\pi a^2\left(y+\frac{y^3}{3b^2}\right)\Big|_0^b=\frac{8}{3}\pi a^2 b.$$

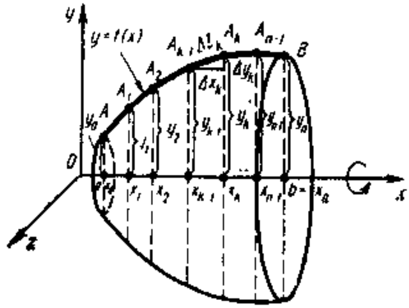


Рис 32

9°. Вычисление площади поверхности тела вращения. Рассмотрим поверхность, образованную вращением вокруг оси Ox кривой $y=f(x)$, где функция f и ее производная f' непрерывны на отрезке $[a, b]$ (рис. 32).

Разобьем дугу AB на части и построим ломаную $AA_1A_2...A_{n-1}B$, как при вычислении длины дуги плоской кривой (см. п. 4°). Каждая трапеция $x_{k-1}A_{k-1}A_kx_k$ опишет при вращении вокруг оси Ox усеченный конус, площадь боковой поверхности которого $\Delta\sigma_k$ вычисляется по известной формуле

$$\Delta\sigma_k = 2\pi \frac{y_{k-1}+y_k}{2} A_{k-1}A_k.$$

Очевидно, что боковая поверхность тела, полученного при вращении ломаной AB вокруг оси Ox, равна сумме боковых поверхностей $\Delta\sigma_k$ всех усеченных конусов.

Определение 2. Площадью поверхности тела, полученного при вращении дуги AB вокруг оси Ox, называется предел Σ, к которому стремится площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox вписанной в дугу AB ломаной $AA_1A_2...A_{n-1}B$, при стремлении к нулю наибольшей из ее сторон $\Delta l = \max\limits_k A_{k-1}A_k \to 0$,

а значит, и при $n\to\infty$, т. е.

$$\Sigma = \lim_{\Delta l\to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta\sigma_k.$$

Обозначим $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$ и $\Delta l_k = A_{k-1}A_k$. Тогда

$$\Delta\sigma_k = \pi(2y_k - \Delta y_k)\Delta l_k \approx 2\pi y_k \Delta l_k.$$

Последнее приближенное равенство справедливо, так как произведение $\Delta y_k \Delta l_k$ при $\Delta l\to 0$ $(n\to\infty)$ является величиной бесконечно малой высшего порядка, чем $\Delta\sigma_k$.

Пусть $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$; тогда (см. п. 4°) $\Delta l_k = A_{k-1}A_k = \sqrt{1+[f'(c_k)]^2}\,\Delta x_k$, где $c_k \in]x_{k-1}, x_k[$, и площадь боковой поверхности k-го усеченного конуса равна

$$\Delta\sigma_k \approx 2\pi y_k \Delta l_k = 2\pi f(x_k)\sqrt{1+[f'(c_k)]^2}\,\Delta x_k.$$

В силу непрерывности f и f' существует предел при $d = \max\limits_k \Delta x_k \to 0$

(при $\Delta l\to 0$):

$$\Sigma = \lim_{d\to 0} 2\pi \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\sqrt{1+[f'(c_k)]^2}\,\Delta x_k,$$

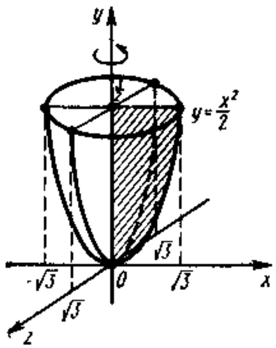


Рис. 33

который равен определенному интегралу:

$$\sum = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx. \quad (17)$$

Заметим, что если кривая $x=\varphi(y)$ вращается вокруг оси Oy, где φ непрерывна и имеет непрерывную производную φ' на отрезке $[a, b]$, то площадь поверхности вращения находится по формуле

$$\sum = 2\pi \int_a^b \varphi(y)\sqrt{1+[\varphi'(y)]^2}\,dy. \quad (18)$$

Примеры. 1. Найти площадь поверхности шара радиуса R.

Решение. Боковую поверхность шара можно считать поверхностью, образованной вращением полуокружности вокруг оси Ox. Уравнение окружности радиуса R имеет вид $x^2+y^2=R^2$. Для верхней полуокружности получим $y=\sqrt{R^2-x^2}$. Следовательно, $y'=-x/\sqrt{R^2-x^2}$. По формуле (17) находим

$$\sum = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2+x^2}\,dx =$$
$$= 2\pi R x \Big|_{-R}^{R} = 4\pi R^2,$$

что согласуется с общеизвестной формулой.

2. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Oy части параболы $y=x^2/2$, $x>0$, отсеченной прямой $y=3/2$ (рис. 33).

Решение. Имеем $x=\sqrt{2y}$, $x'=1/\sqrt{2y}$. Используя формулу (18), получим

$$\sum = 2\pi \int_0^{3/2} \sqrt{2y}\sqrt{1+\frac{1}{2y}}\,dy = 2\pi \int_0^{3/2} \sqrt{2y+1}\,dy =$$
$$= 2\pi \frac{(2y+1)^{3/2}}{3}\Big|_0^{3/2} = \frac{14\pi}{3}.$$

10°. Упражнения

Найдите площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:

1. $y=4-x^2$, $y=0$.
2. $xy=4$, $x=1$, $x=4$, $y=0$.
3. $y=x^2$, $y=2-x^2$.
4. $y=x^2+4x$, $y=x+4$.
5. Найдите площадь, ограниченную осью Ox и одной аркой циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ (см рис 25).

Найдите площади фигур, ограниченных линиями, заданными в полярных координатах:

6. $r=a\cos 2\varphi$.
7. $r=a\sin 3\varphi$.
8. $r=a/\varphi$, $\pi/4\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$.
9. $r=a(1+\sin^2 2\varphi)$, $r=a$.

Найдите длину дуги кривой:

10. $y=\ln\sin x$ от $x=\pi/3$ до $x=2\pi/3$.
11. Астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ (см. рис. 20).
12. $x=t^6/6$, $y=2-t^4/4$ между точками пересечения с осью абсцисс.
13. Первого витка спирали $r=a\varphi$.
14. Всей кривой $r=a\sin^3(\varphi/3)$.

Найдите объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями.

15. $xy=4$, $x=1$, $x=4$, $y=0$ вокруг оси Ox.
16. $y^2=4-x$, $x=0$ вокруг оси Oy.
17. $y=\sin x$, $0\leqslant x\leqslant\pi$ вокруг оси Ox.
18. $y=a-x^2/a$ и $x+y=a$ вокруг оси Oy.

Найдите площадь поверхности, образованной вращением кривой.

19. $y=\sin x$ (одной полуволны) вокруг оси Ox.
20. $y=x^3/3$, $x=-2$, $x=2$ вокруг оси Ox.
21. $x^2=y+4$, $y=2$ вокруг оси Oy.

§ 2.5*. Кривизна плоской линии. Центр и окружность кривизны. Эволюта и эвольвента. Кривизна пространственной линии. Формулы Френе

1°. Кривизна плоской линии. Кривизна плоской линии характеризует степень ее искривленности. Рассмотрим кривую, лежащую на плоскости, не пересекающую саму себя и имеющую определенную касательную в каждой точке (рис. 34).

Пусть AB — некоторая дуга на этой кривой. Проведем касательные к кривой в точках A и B. При переходе по дуге AB от A к B касательная поворачивается на угол α, который называют *углом смежности* дуги AB. Рассмотрим дугу BC, равную по длине дуге AB. Построив касательные к кривой в точках B и C, находим угол смежности α_1 дуги BC. На рис. 34 видно, что $\alpha<\alpha_1$ и дуга AB искривлена меньше, чем дуга BC. Следовательно, из двух дуг одинаковой длины меньше искривлена та, у которой угол смежности меньше. Естественно, для характеристики искривленности линии следует взять отношение угла смежности к длине соответствующей дуги. Введем следующие определения.

Определение 1. Средней кривизной $K_{ср}$ дуги AB называется отношение угла смежности α к длине L дуги AB, т. е.

$$K_{ср}=\alpha/L. \tag{1}$$

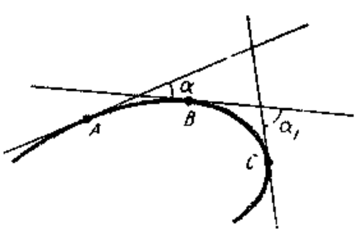


Рис. 34

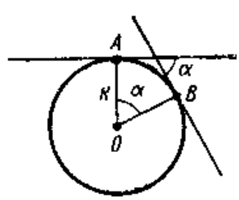


Рис. 35

Определение 2. Кривизной K_A линии в точке A называется предел средней кривизны $K_{ср}$ дуги AB при стремлении точки B к точке A вдоль линии, т. е.

$$K_A = \lim_{B \to A} K_{ср} = \lim_{L \to 0} \frac{\alpha}{L}. \tag{2}$$

Комментарии к определениям 1 и 2. 1) Средняя кривизна дуги характеризует искривленность участка линии.

2) Кривизна линии в данной точке характеризует искривленность линии в непосредственной близости к некоторой точке A.

3) Очевидно, в различных точках A одного и того же участка линии кривизна K_A может быть различна, а средняя кривизна $K_{ср}$ неизменна. Естественно, чем меньше длина L участка кривой при определении $K_{ср}$, тем ближе значения $K_{ср}$ и K_A для точки A, лежащей на этом участке.

Примеры. 1. Определить кривизну прямой в любой ее точке.

Решение. Поскольку угол смежности α на любом участке прямой равен нулю, имеем $K_{ср} = K_A = 0$.

2. Определить кривизну окружности радиуса R в любой ее точке.

Решение. Рассмотрим дугу AB окружности (рис. 35). Очевидно, центральный угол $\angle AOB$ равен углу смежности α. Так как длина L дуги AB, соответствующей центральному углу α, равна αR, то по формуле (1) получим

$$K_{ср} = \frac{\alpha}{L} = \frac{\alpha}{\alpha R} = \frac{1}{R}.$$

Используя формулу (2), находим кривизну в произвольной точке A:

$$K_A = \lim_{B \to A} K_{ср} = \lim_{L \to 0} \frac{1}{R} = \frac{1}{R}.$$

Таким образом, для окружности понятия средней кривизны и кривизны в любой точке совпадают. Это единственная кривая, для которой выполняется указанное свойство.

Чтобы вывести формулу для вычисления кривизны, изучим это понятие методами векторного анализа. Для этого необходимо повторить понятие вектора и действия над векторами (см. том I, гл. I), а также понятие векторной функции скалярного аргумента и ее дифференцирование (см. том I, гл. V).

Пусть кривая на плоскости задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t). \tag{3}$$

Предположим, что все необходимые в дальнейшем производные существуют и непрерывны. Очевидно, что скалярный параметр t в силу равенств (3) определяет положение переменной точки $M(x, y)$ на кривой. Рассмотрим радиус-вектор $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, где $x(t)$, $y(t)$ — координаты вектора, а $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — единичные ортогональные векторы, направленные соответственно по оси Ox и Oy. Вектор $\vec{r}(t)$ определяет положение точки M на кривой (рис. 36).

Как известно, производная $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}$ задает вектор, направленный по касательной к кривой. Перейдем теперь к параметру l, равному длине дуги, отсчитываемой вдоль кривой от фиксированной ее точки A в определенном направлении (рис. 37). Тогда уравнения (3) примут вид

$$x = x(l), \quad y = y(l), \tag{4}$$

а вектор $\vec{r}(l)$ будет направлен от точки A к переменной точке M с координатами (x, y), определяемыми соотношениями (4). Придадим параметру l приращение Δl; тогда приращение вектора $\vec{r}(l)$ есть $\Delta\vec{r}(l)$, а производная

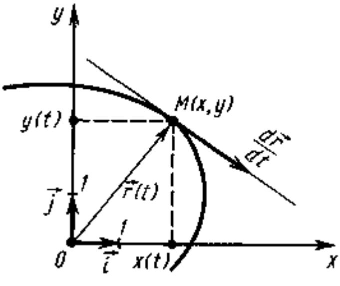


Рис. 36

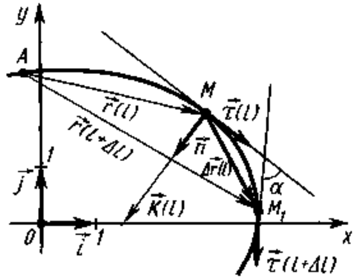


Рис. 37

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}l}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta\vec{r}(l)}{\Delta l}=\vec{\tau}(l) \tag{5}$$

равна единичному вектору касательной $\vec{\tau}(l)$ в точке M. Действительно, при $\Delta l\to 0$ точка M_1 стремится к M вдоль кривой. Если точка M_1 близка к M, то длину дуги MM_1 можно считать равной длине вектора $\Delta\vec{r}(l)$, а вектор $\Delta\vec{r}(l)$ при этом займет положение касательной. В точке M_1 также можно построить единичный вектор касательной — вектор $\vec{\tau}(l+\Delta l)$. Поскольку векторы $\vec{\tau}(l)$ и $\vec{\tau}(l+\Delta l)$ имеют одинаковую длину, равную единице, они отличаются лишь направлением, изменение которого характеризует угол смежности α, а следовательно, и искривленность линии. Поэтому за *вектор кривизны* естественно принять производную от единичного вектора касательной $\vec{\tau}(l)$ по l, т. е.

$$\vec{K}(l)=\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}(l)}{\mathrm{d}l}. \tag{6}$$

Из формулы (2) и определения производной вытекает, что кривизна линии в точке M равна длине $|\vec{K}(l)|$ вектора $\vec{K}(l)$.

Покажем, что вектор кривизны $\vec{K}(l)$ перпендикулярен вектору касательной, т. е. направлен по нормали в сторону вогнутости кривой.

Так как $\vec{\tau}(l)$ — единичный вектор, то $\vec{\tau}\cdot\vec{\tau}=1$. Дифференцируя по l, получим

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}l}\vec{\tau}+\vec{\tau}\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}l}=0,\text{ или } 2\vec{\tau}\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}l}=0.$$

Последнее равенство справедливо в силу независимости скалярного произведения от порядка множителей. Известно, что скалярное произведение отличных от нуля векторов равно нулю, если векторы перпендикулярны. Так как $\vec{\tau}\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}l}=0$, или $\vec{\tau}\vec{K}=0$, то $\vec{K}\perp\vec{\tau}$.

Выведем формулу для вычисления кривизны. Проведем касательные векторы к кривой в точках M и N (рис. 38). Обозначим через α и $\alpha+\Delta\alpha$ углы наклона этих касательных к оси Ox. Единичный вектор $\vec{\tau}$ в координатной форме имеет вид $\vec{\tau}=\cos\alpha\cdot\vec{i}+\sin\alpha\cdot\vec{j}$, где $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ равны направляющим косинусам. Дифференцируя по l, получим

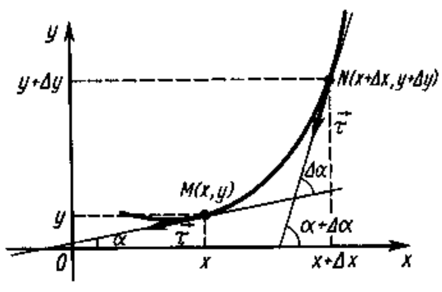


Рис. 38

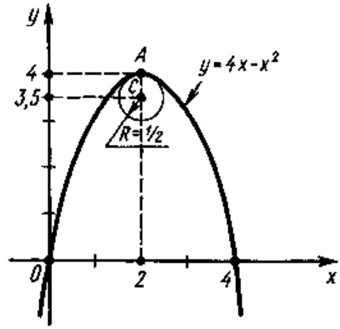


Рис. 39

$$\frac{d\vec{\tau}}{dl} = -\sin\alpha\frac{d\alpha}{dl}\vec{i} + \cos\alpha\frac{d\alpha}{dl}\vec{j}.$$

Так как в силу формулы (6) справедливо равенство $\left|\frac{d\vec{\tau}}{dl}\right| = |\vec{K}| = K$, то

$$K = \left|\sqrt{(-\sin\alpha)^2\left(\frac{d\alpha}{dl}\right)^2 + \cos^2\alpha\left(\frac{d\alpha}{dl}\right)^2}\right| = \left|\frac{d\alpha}{dl}\right|. \tag{7}$$

Можно показать, что если кривая задана в декартовой системе координат уравнением $y=f(x)$, где функция $f(x)$ дважды дифференцируема, то формула (7) примет вид

$$K = |f''(x)|\cdot[1+[f'(x)]^2]^{-3/2} \tag{8}$$

Пример 3. Определить кривизну параболы $y=4x-x^2$ в ее вершине (рис. 39).

Решение. Вершиной параболы является точка A (2, 4). Поскольку $y' = 4-2x$ и $y''=-2$, по формуле (8) получим

$$K_A = \frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{3/2}}\Big|_{x=2} = \frac{|-2|}{[1+(4-2x)^2]^{3/2}}\Big|_{x=2} = \frac{2}{(1+0)^{3/2}} = 2.$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями (3), то формула (7) примет вид

$$K = \frac{|y''(t)\,x'(t) - y'(t)\,x''(t)|}{[(x'(t))^2+(y'(t))^2]^{3/2}} \tag{9}$$

при условии, что существуют $y'(t)$, $y''(t)$, $x'(t)$, $x''(t)$.

Пример 4. Определить кривизну циклоиды в ее вершине (см. рис. 25).

Решение. Параметрические уравнения циклоиды имеют вид $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$. Находим $x'(t)=a(1-\cos t)$, $x''(t)=a\sin t$, $y'(t)=a\sin t$, $y''(t)=a\cos t$. Используя формулу (9), для любой точки циклоиды получим

$$K = \frac{|a^2\cos t\,(1-\cos t) - a^2\sin^2 t|}{[a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t]^{3/2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}a(1-\cos t)^{1/2}} = \frac{1}{4a\left|\sin\frac{t}{2}\right|}.$$

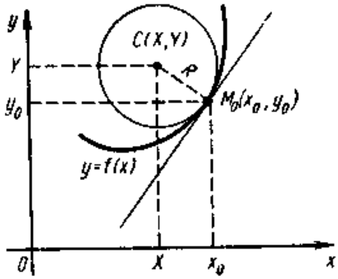


Рис. 40

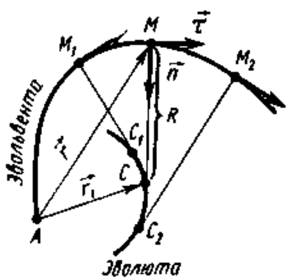


Рис. 41

Поскольку вершине M соответствует значение параметра $t=\pi$, имеем $K_M = 1/(4a)$.

Если кривая задана уравнением в полярных координатах $r=r(\varphi)$, то формула (7) примет вид

$$K = \frac{|r^2(\varphi) + 2(r'(\varphi))^2 - r(\varphi)\cdot r''(\varphi)|}{[r^2(\varphi)+(r'(\varphi))^2]^{3/2}} \tag{10}$$

при условии, что $r'(\varphi)$ и $r''(\varphi)$ существуют.

Пример 5. Определить кривизну линии $r^2=a^2\cos 2\varphi$ в любой ее точке $M(r, \varphi)$ (см. рис. 22).

Решение. Имеем $r'_\varphi = -\dfrac{a^2}{r}\sin 2\varphi$, $r''_\varphi = -\dfrac{a^2(1+\cos^2 2\varphi)}{r\cos 2\varphi}$. По формуле (10) находим

$$K_M = \frac{\left| a^2\cos 2\varphi + 2\dfrac{a^4}{r^2}\sin^2 2\varphi + \dfrac{a^2(1+\cos^2 2\varphi)}{\cos 2\varphi}\right|}{\left[a^2\cos 2\varphi + \dfrac{a^4}{r^2}\sin^2 2\varphi\right]^{3/2}} =$$

$$= \frac{3a^2(\cos 2\varphi)^{3/2}}{a^3\cos 2\varphi} = \frac{3r}{a^2}.$$

2°. Центр и окружность кривизны. Во многих исследованиях бывает удобно приближенно заменить некоторую линию вблизи рассматриваемой точки окружностью, имеющей ту же кривизну, что и данная линия в этой точке.

Определение 3. Окружностью кривизны линии в заданной на ней точке M_0 (рис. 40) называется окружность, которая: 1) касается линии в точке M_0; 2) направлена вогнутостью в этой точке в ту же сторону, что и данная линия; 3) имеет ту же кривизну, что и данная линия в точке M_0. Центр C построенной окружности называется *центром кривизны*, а ее радиус — *радиусом кривизны*.

Из определения ясно, что радиус кривизны R находится по формуле

$$R = \frac{1}{K} = \frac{1}{|\vec{K}(t)|}, \tag{11}$$

откуда $K = |\vec{K}| = \dfrac{1}{R}$ или $\vec{K} = \dfrac{1}{R}\vec{n}$, где $\vec{n}$ — единичный вектор нормали (см. рис. 37).

Примеры. 1. Определить радиус кривизны линии $y=4x-x^2$ в ее вершине и построить окружность кривизны.

Решение. В примере 3 п. 1° была найдена кривизна $K_A=2$ в вершине A (2, 4). В силу равенства (11) имеем $R_A=1/2$. Окружность кривизны изображена на рис. 39.

2. Определить радиус кривизны циклоиды в ее вершине и построить окружность кривизны.

Решение. В примере 4 п. 1° была найдена кривизна $K_M=1/(4a)$ в вершине M. Отсюда $R_M=1/K_M=4a$. Окружность кривизны изображена на рис. 25.

3°. Эволюта и эвольвента. Множество всех центров кривизны данной линии образует линию, называемую *эволютой*. По отношению к своей эволюте данная линия называется *эвольвентой*.

Пусть $\vec{r}$ и l — радиус-вектор и длина дуги для эвольвенты, а $\vec{r}_1$ и l_1 — те же величины для эволюты. Из рис. 41 видно, что $\vec{r}_1=\vec{r}+R\vec{n}$. Дифференцируя по l, получим

$$\frac{d\vec{r}_1}{dl}=\frac{d\vec{r}}{dl}+\frac{dR}{dl}\vec{n}+R\frac{d\vec{n}}{dl}=\vec{\tau}+\frac{dR}{dl}\vec{n}+R\frac{d\vec{n}}{dl}. \qquad (12)$$

Найдем $\frac{d\vec{n}}{dl}$. Поскольку $|\vec{n}|=1$, имеем $\frac{d\vec{n}}{dl}\perp\vec{n}$ или $\frac{d\vec{n}}{dl}\parallel\vec{\tau}$ (в силу того, что $\vec{n}\perp\vec{\tau}$). Очевидно, $\vec{\tau}\cdot\vec{n}=0$; дифференцируя по l, получим $\frac{d\vec{\tau}}{dl}\vec{n}+\vec{\tau}\frac{d\vec{n}}{dl}=0$, или $\vec{K}\vec{n}+\vec{\tau}\frac{d\vec{n}}{dl}=0$. Так как $\vec{K}\vec{n}=\frac{1}{R}\vec{n}^2=\frac{1}{R}$, то $\vec{\tau}\frac{d\vec{n}}{dl}=-\frac{1}{R}$. Далее, векторы $\vec{\tau}$ и $\frac{d\vec{n}}{dl}$ параллельны и $|\vec{\tau}|=1$; поэтому вектор $\frac{d\vec{n}}{dl}$ направлен противоположно вектору $\vec{\tau}$ и имеет длину $1/R$, т. е.

$$\frac{d\vec{n}}{dl}=-\frac{1}{R}\vec{\tau}. \qquad (13)$$

Подставляя (13) в равенство (12), получим

$$\frac{d\vec{r}_1}{dl}=\frac{dR}{dl}\vec{n}. \qquad (14)$$

Левая часть равенства (14) есть вектор, направленный по касательной к эволюте, а правая часть — вектор, направленный по нормали к эвольвенте, но оба направления проходят через одну точку C и, следовательно, совпадают. Таким образом, получаем следующее свойство эволюты, которое используется в геометрических построениях: *нормаль к эвольвенте касается эволюты в соответствующей точке.*

Чтобы составить уравнения эволюты по ее эвольвенте, найдем координаты центра кривизны. Возьмем на линии $y=f(x)$ фиксированную точку $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 40) и построим для нее центр кривизны $C(X, Y)$. Уравнение нормали CM_0 имеет вид

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0). \qquad (15)$$

Так как точка C лежит на нормали, то ее координаты должны удовлетворять уравнению (15):

$$Y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(X - x_0). \qquad (16)$$

С другой стороны, расстояние между точками $C(X, Y)$ и $M_0(x_0, y_0)$ равно радиусу кривизны R, т. е.

$$(Y - y_0)^2 + (X - x_0)^2 = R^2. \qquad (17)$$

Решая совместно уравнения (16) и (17), находим

$$X = x_0 \pm \frac{f'(x_0)\,R}{\sqrt{1 + [f'(x_0)]^2}}, \quad Y = y_0 \mp \frac{R}{\sqrt{1 + [f'(x_0)]^2}}. \qquad (18)$$

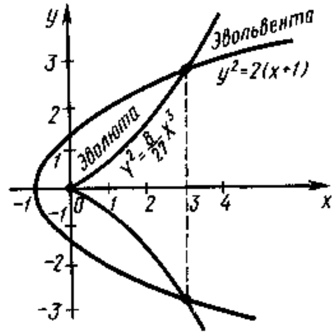


Рис. 42

В силу соотношений (11) и (8) имеем $R = \dfrac{[1 + [f'(x_0)]^2]^{3/2}}{|f''(x_0)|}$ и равенства (18) примут вид

$$X = x_0 - \frac{f'(x_0)\,[1 + [f'(x_0)]^2]}{f''(x_0)}, \quad Y = y_0 + \frac{1 + [f'(x_0)]^2}{f''(x_0)}. \qquad (19)$$

Если теперь найти координаты центра кривизны для любой точки $M(x, y)$, где x, y — текущие координаты, то, обозначая через $y' = f'(x)$ и $y'' = f''(x)$, получим параметрические уравнения эволюты с параметром x:

$$X = x - \frac{y'\,[1 + (y')^2]}{y''}, \quad Y = y + \frac{1 + (y')^2}{y''}. \qquad (20)$$

Для кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$ и $y = y(t)$, из уравнений (20) легко получить параметрические уравнения эволюты с параметром t:

$$X = x - \frac{y'\,[(x')^2 + (y')^2]}{x'y'' - x''y'}, \quad Y = y + \frac{x'\,[(x')^2 + (y')^2]}{x'y'' - x''y'}. \qquad (21)$$

Примеры. 1. Составить уравнение эволюты кривой $y^2 = 2(x+1)$. Построить кривую и ее эволюту.

Решение. Имеем $y = \sqrt{2(x+1)}$, откуда $y' = \dfrac{1}{\sqrt{2(x+1)}}$ и $y'' = -[2(x+1)]^{-3/2}$. Подставляя полученные выражения в равенства (20), находим $X = 3(x+1)$, $Y = -[2(x+1)]^{3/2}$. Исключив параметр x, получим $Y^2 = \dfrac{8}{27}X^3$. Графиком исходной кривой (эвольвенты) является парабола, графиком эволюты — полукубическая парабола (рис. 42).

2. Составить уравнение эволюты астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$. Построить эвольвенту и эволюту.

Решение. Кривая задана параметрическими уравнениями. Имеем $x' = -3a\cos^2 t\sin t$, $x'' = -3a\cos t(\cos^2 t - 2\sin^2 t)$, $y' = 3a\sin^2 t\cos t$, $y'' = 3a\sin t \times (-\sin^2 t + 2\cos^2 t)$. Подставляя эти выражения в равенства (21), находим

$$X = a(\cos^3 t + 3\sin^2 t\cos t), \quad Y = a(\sin^3 t + 3\cos^2 t\sin t).$$

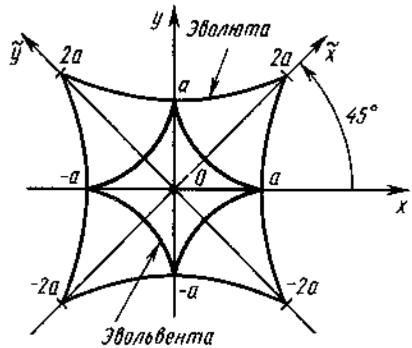


Рис. 43

Исключив параметр t, получим уравнение эволюты $(X+Y)^{2/3}+(X-Y)^{2/3}=2a^{2/3}$. При повороте осей координат на 45° оно примет вид $\tilde{x}^{2/3}+\tilde{y}^{2/3}=(2a)^{2/3}$, т. е. эволютой астроиды служит также астроида, повернутая на 45° и увеличенная вдвое (рис. 43).

4°. Переходные кривые. Рассмотрим один практический вопрос, возникающий при разбивке закруглений железнодорожного полотна. Как известно из механики, при движении материальной точки по кривой возникает центробежная сила, величина которой определяется формулой $F=mv^2/R$, где m — масса точки, v — ее скорость, а R — радиус кривизны линии в рассматриваемой точке.

Если бы прямолинейная часть железнодорожного пути непосредственно примыкала к дуге, являющейся частью окружности (рис. 44, *а*), то при переходе на эту дугу центробежная сила возникала бы мгновенно. Действительно, кривизна прямой $K_1=0$, а кривизна окружности радиуса R составляет $K_2=1/R$, откуда радиус кривизны окружности есть $1/K_2=R$, а радиус кривизны прямой $1/K_1$ близок к бесконечности. Следовательно, центробежная сила на прямолинейном участке пути очень мала, а на дуге окружности сравнительно велика и возникает мгновенно. Это приводит к сильным толчкам, а значит, и к повышенному износу колесных пар и рельсового пути. Для избежания этого строят *переходные кривые*, дающие возможность постепенно увеличивать кривизну от нулевой на прямолинейном участке до кривизны дуги окружности. При этом центробежная сила нарастает постепенно и резких толчков нет.

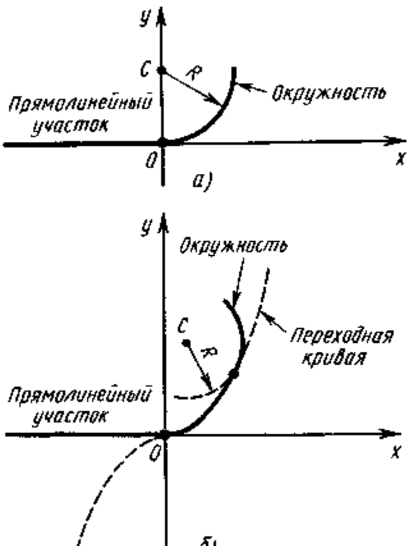


Рис. 44

В качестве переходной кривой (рис. 44, *б*) можно использовать кубическую параболу $y=\dfrac{x^3}{6q}$. Тогда $y'=\dfrac{x^2}{2q}$, $y''=\dfrac{x}{q}$. Применяя формулы (11) и (8), для радиуса кривизны в точке $M(x, y)$ получим

$$R_M=\frac{q}{x}\left(1+\frac{x^4}{4q^2}\right)^{3/2}.$$

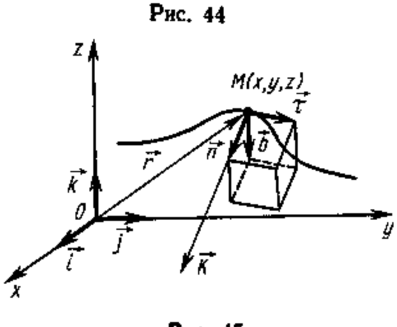


Рис. 45

Если $x=0$, то $R_M\to\infty$ и кривая касается оси Ox (прямолинейного участка пути). Если x таково, что $Rx-q=\frac{x^4}{4q}$, то кривая касается окружности радиуса R (закругленного участка пути).

5°. Кривизна пространственной линии. В пространстве $\mathbf{R}^3$ кривая может быть задана с помощью радиуса-вектора $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$, где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — координаты переменной точки $M(x, y, z)$, выраженные через параметр t, а $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — единичные векторы, направленные соответственно по осям Ox, Oy, Oz (рис. 45). Примем за параметр t длину дуги l и продифференцируем $\vec{r}(l)$ по l. Как и в плоском случае, получим единичный вектор касательной к кривой:

$$\frac{d\vec{r}}{dl}=\vec{\tau}. \tag{22}$$

Производная от $\vec{\tau}$ по l называется *вектором кривизны*:

$$\vec{K}=\frac{d\vec{\tau}}{dl}. \tag{23}$$

Длина вектора кривизны равна кривизне линии, т. е. $K=|\vec{K}|=1/R$, где R — радиус кривизны. Как и в плоском случае, $\vec{K}\perp\vec{\tau}$. Пусть $\vec{n}$ — единичный вектор нормали; тогда

$$\vec{K}=\frac{1}{R}\vec{n}. \tag{24}$$

Направление вектора $\vec{n}$ называется направлением *главной нормали кривой*. Введем еще один вектор единичной длины, перпендикулярный плоскости векторов $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$:

$$\vec{b}=\vec{\tau}\times\vec{n}. \tag{25}$$

Вектор $\vec{b}$ называется *единичным вектором бинормали*.

Три единичных вектора $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ и $\vec{b}$ имеют ту же ориентацию, что и координатные оси, и образуют *переменный триэдр*, связанный с кривой. Если кривая является плоской, то она целиком лежит в плоскости векторов $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$. В этом случае вектор бинормали $\vec{b}$ — постоянный вектор единичной длины, перпендикулярный плоскости кривой. Если же кривая не является плоской, то производная $\frac{d\vec{b}}{dl}$ характеризует отклонение кривой от плоской формы и называется *вектором кручения*. Покажем, что вектор кручения параллелен главной нормали. В силу формул (25) и (23) имеем

$$\frac{d\vec{b}}{dl}=\vec{K}\times\vec{n}+\vec{\tau}\times\frac{d\vec{n}}{dl}.$$

Так как $\vec{K}\parallel\vec{n}$, то $\vec{K}\times\vec{n}=0$ и, следовательно,

$$\frac{d\vec{b}}{dl}=\vec{\tau}\times\frac{d\vec{n}}{dl}. \tag{26}$$

Из равенства (26) вытекает, что векторы $\frac{d\vec{b}}{dl}$ и $\vec{\tau}$ перпендикулярны. С другой стороны, производная $\frac{d\vec{b}}{dl}$ единичного вектора $\vec{b}$ перпендикулярна самому вектору $\vec{b}$, т. е. $\frac{d\vec{b}}{dt}$ перпендикулярен плоскости векторов $\vec{\tau}$ и $\vec{b}$, или $\frac{d\vec{b}}{dl} \parallel \vec{n}$. Тогда по аналогии с равенством (24) можно записать

$$\frac{d\vec{b}}{dl} = \frac{1}{\rho}\vec{n}, \tag{27}$$

где $1/\rho$ называется *кручением кривой*, а ρ — *радиусом кручения*. Кручение кривой 1ρ, в противоположность кривизне $1/R$ может быть не только положительной, но и отрицательной величиной.

Выведем формулы для вычисления кривизны и кручения. Запишем векторы в координатной форме:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k};\ \vec{\tau} = \frac{dx}{dl}\vec{i} + \frac{dy}{dl}\vec{j} + \frac{dz}{dl}\vec{k},\ \vec{K} = \frac{d^2x}{dl^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dl^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dl^2}\vec{k}.$$

Следовательно, кривизну можно вычислить по формуле

$$K = |\vec{K}| = \frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dl^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dl^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dl^2}\right)^2}. \tag{28}$$

Из равенства (27) видно, что $\frac{d\vec{b}}{dl}\vec{n} = \frac{1}{\rho}\vec{n}\cdot\vec{n} = \frac{1}{\rho}$. Используя формулы (26) и (24), получим $\frac{1}{\rho} = \left[\vec{\tau}\times\frac{d\vec{n}}{dl}\right]\vec{n} = \left[\vec{\tau}\times\frac{d(R\vec{K})}{dl}\right]R\vec{K}$, откуда

$$\frac{1}{\rho} = R\frac{dR}{dl}[\vec{\tau}\times\vec{K}]\vec{K} + R^2\left[\vec{\tau}\times\frac{d\vec{K}}{dl}\right]\vec{K}.$$

Так как $[\vec{\tau}\times\vec{K}]\perp\vec{K}$, то первое слагаемое равно нулю. Во втором слагаемом переставим множители в векторном произведении, одновременно меняя знак; тогда получим

$$\frac{1}{\rho} = -R^2\left[\frac{d\vec{K}}{dl}\times\vec{\tau}\right]\vec{K}.$$

В силу формул (22) и (23) имеем $\frac{1}{\rho} = -R^2\left[\frac{d^3\vec{r}}{dl^3}\times\frac{d\vec{r}}{dl}\right]\frac{d^2\vec{r}}{dl^2}$, откуда после круговой перестановки получим

$$\frac{1}{\rho} = -R^2\left[\frac{d\vec{r}}{dl}\times\frac{d^2\vec{r}}{dl^2}\right]\frac{d^3\vec{r}}{dl^3}. \tag{29}$$

Кручение и радиус кручения можно вычислить по формуле (29).

6°. Формулы Френе. Обозначим направляющие косинусы каждого вектора из переменного триэдра с осями Ox, Oy и Oz в соответствии со следующей таблицей:

Оси / Векторы	Ox	Oy	Oz
$\vec{\tau}$	α	β	γ
$\vec{n}$	α_1	β_1	γ_1
$\vec{b}$	α_2	β_2	γ_2

Формулы Френе задают выражения производных по l от записанных в таблице девяти направляющих косинусов. Например, для единичных векторов $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$ имеем $\vec{\tau}=\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}+\gamma\vec{k}$, $\vec{n}=\alpha_1\vec{i}+\beta_1\vec{j}+\gamma_1\vec{k}$. Отсюда в силу равенств (23) и (24), т. е. из соотношения $\frac{d\vec{\tau}}{dl}=\frac{1}{R}\vec{n}$, получим первые три формулы Френе, а именно:

$$\frac{d\alpha}{dl}=\frac{\alpha_1}{R},\ \frac{d\beta}{dl}=\frac{\beta_1}{R};\ \frac{d\gamma}{dl}=\frac{\gamma_1}{R}. \tag{30}$$

Далее, так как $\vec{b}=\alpha_2\vec{i}+\beta_2\vec{j}+\gamma_2\vec{k}$, то, используя равенство (27), получим следующие три формулы Френе:

$$\frac{d\alpha_2}{dl}=\frac{\alpha_1}{\rho},\ \frac{d\beta_2}{dl}=\frac{\beta_1}{\rho},\ \frac{d\gamma_2}{dl}=\frac{\gamma_1}{\rho}. \tag{31}$$

Для вывода последних трех формул Френе из непосредственного рассмотрения переменного триэдра находим $\vec{n}=-\vec{\tau}\times\vec{b}$, откуда

$$\frac{d\vec{n}}{dl}=-\frac{d\vec{\tau}}{dl}\times\vec{b}-\vec{\tau}\times\frac{d\vec{b}}{dl}=-\frac{1}{R}\vec{n}\times\vec{b}-\frac{1}{\rho}\vec{\tau}\times\vec{n}=-\frac{1}{R}\vec{\tau}-\frac{1}{\rho}\vec{b}.$$

Окончательно получаем

$$\frac{d\alpha_1}{dl}=-\left[\frac{\alpha}{R}+\frac{\alpha_2}{\rho}\right],\ \frac{d\beta_1}{dl}=-\left[\frac{\beta}{R}+\frac{\beta_2}{\rho}\right],\ \frac{d\gamma_1}{dl}=-\left[\frac{\gamma}{R}+\frac{\gamma_2}{\rho}\right]. \tag{32}$$

Пользуясь формулами Френе, можно показать, что если всюду вдоль некоторой линии кривизна $1/R=0$, то такая линия является прямой. Действительно, в силу формул (30) имеем $\frac{d\alpha}{dl}=\frac{d\beta}{dl}=\frac{\gamma}{dl}=0$, т. е. направляющие косинусы α, β и γ касательной $\vec{\tau}$ к линии постоянны. Для касательной имеем $\alpha=\frac{dx}{dl}$, $\beta=\frac{dy}{dl}$, $\gamma=\frac{dz}{dl}$, т. е. производные постоянны, а значит, текущие координаты x, y, z линии являются многочленами первой степени от l. Следовательно, эта линия представляет собой кривую первого порядка, т. е. прямую.

Аналогично можно показать, что если вдоль некоторой линии кручение равно нулю, то такая линия есть плоская кривая.

§ 2.6. Несобственные интегралы с бесконечными пределами. Несобственные интегралы от неограниченной подынтегральной функции. Основные свойства. Абсолютная и условная сходимость. Признаки сходимости

При определении интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ предполагалось, что: а) отрезок интегрирования $[a, b]$ конечен; б) подынтегральная функция определена и ограничена на этом отрезке (см. § 2.1). Если нарушается хотя бы одно из условий а) или б), то интеграл называется *несобственным* определенным *интегралом*. При этом если нарушено только условие а), то говорят о *несобственном интеграле первого рода* (или интеграле с бесконечными пределами интегрирования). Если нарушено только условие б), т. е. подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв на отрезке интегрирования $[a, b]$, то говорят о *несобственном интеграле второго рода* (или интеграле от неограниченной подынтегральной функции).

1°. Несобственные интегралы первого рода. Рассмотрим примеры, приводящие к таким интегралам.

Примеры. 1. Пусть требуется найти площадь S под кривой $y=1/x$, $x\geqslant a>0$ (рис. 46). Площадь всей заштрихованной фигуры непосредственно вычислить трудно. Однако если отсечь бесконечный «хвост» прямой $x=b$, то площадь криволинейной трапеции $aABb$ можно найти с помощью определенного интеграла $\int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x}$. При $b\to\infty$ мы должны получить площадь всей заштрихованной фигуры, т. е.

$$S=\lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b\frac{\mathrm{d}x}{x}=\lim_{b\to\infty}\left[\ln x\Big|_a^b\right]=\lim_{b\to\infty}\ln\frac{b}{a}=\infty.$$

Таким образом, в данном случае говорить о площади не имеет смысла.

2. Пусть требуется найти площадь S под кривой $y=1/x^2$, $x\geqslant a>0$. Рассуждая, как и в примере 1, имеем

$$S=\lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_a^b=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a}.$$

Следовательно, в данном случае площадь бесконечного «хвоста» конечна и равна $1/a$.

Итак, иногда можно обобщить понятие определенного интеграла на случай бесконечного верхнего предела.

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на интервале $[a, \infty[$. Тогда конечный предел $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (если он существует) называется *несобственным интегралом первого рода* и обозначается $\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$, т. е

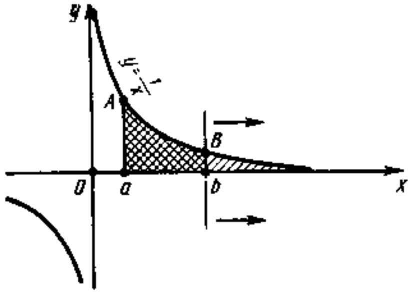


Рис. 46

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (1)$$

Аналогично определяются несобственные интегралы и для других бесконечных интервалов:

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad (2)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^\infty f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (3)$$

Комментарии к определению 1. 1) Если существует конечный предел (1), то говорят, что несобственный интеграл (1) *сходится*; если же предел (1) либо не существует, либо бесконечен, то говорят, что несобственный интеграл (1) *расходится*. Так, в примере 1 несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x}$ расходится, а в примере 2 несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{1}{a}$ сходится.

2) В левой части равенства (3) несобственный интеграл сходится тогда, когда сходится каждый из несобственных интегралов в правой части.

Примеры. 3. Вычислить $\int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x}$.

Решение. Используя формулу (1), находим

$$\int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x} = \lim_{b\to\infty}\int\limits_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x} = \lim_{b\to\infty}\left[\int\limits_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int\limits_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x+1}\right] =$$

$$=\lim_{b\to\infty}\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\Big|_1^b=\lim_{b\to\infty}\ln\frac{b}{b+1}-\ln\frac{1}{2}=\ln 2.$$

Следовательно, данный интеграл сходится.

4. Вычислить $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

Решение. Согласно формуле (3), имеем $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=$ $=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$. Первый интеграл находим по формуле (2), а второй — по формуле (1):

$$\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_a^0=\lim_{a\to-\infty}(-\operatorname{arctg}a)=\frac{\pi}{2};$$

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to\infty}\int\limits_{0}^{b}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_0^b=\lim_{b\to\infty}\operatorname{arctg}b=\frac{\pi}{2}.$$

Итак, $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$, т. е. интеграл сходится.

5. Вычислить $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

Решение. Имеем $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\lim_{b\to\infty}\int\limits_{2}^{b}\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$. Воспользуемся подстановкой $x=1/t$, которая позволяет свести несобственный интеграл к собственному. Находим $dx=-\frac{dt}{t^2}$, $t=\frac{1}{x}$; если $x=2$, то $t=1/2$, если $x=b$, то $t=1/b$. Тогда

$$\lim_{b\to\infty}\int\limits_{2}^{b}\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\lim_{b\to\infty}\int\limits_{1/2}^{1/b}\left(\frac{-dt}{t^2\cdot\frac{1}{t^2}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}\right)=$$

$$=-\int\limits_{1/2}^{0}\frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{2}\int\limits_{1/2}^{0}\frac{d(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}}=\sqrt{1-t^2}\Big|_{1/2}^{0}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}.$$

Значит, данный интеграл сходится.

6. Вычислить $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Решение. Имеем

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to\infty} \int\limits_1^{b} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to\infty} 2\sqrt{x}\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} (2\sqrt{b}-2) = \infty.$$

Следовательно, данный интеграл расходится.

2°. Признаки сходимости несобственных интегралов первого рода. Во многих случаях бывает достаточно установить, сходится или расходится несобственный интеграл, не вычисляя его значение по формулам (1)—(3). В этих случаях пользуются следующими признаками сходимости, которые приведем без доказательства.

Теорема 1. *Пусть при* $x \geqslant a$ *выполнено неравенство* $0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x)$. *Тогда:* 1) *если* $\int\limits_a^{\infty} \varphi(x)\,dx$ *сходится, то сходится и интеграл* $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$, *причем* $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^{\infty} \varphi(x)\,dx$; 2) *если* $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ *расходится, то расходится и* $\int\limits_a^{\infty} \varphi(x)\,dx$.

Комментарий к теореме 1. В теореме 1 речь идет о несобственных интегралах с неотрицательными подынтегральными функциями. Если же подынтегральная функция меняет знак на интервале интегрирования, то применяют следующий признак сходимости.

Теорема 2. *Пусть при* $x \geqslant a$ *выполнено неравенство* $|f(x)| \leqslant \varphi(x)$, $\varphi(x) \geqslant 0$. *Тогда если* $\int\limits_a^{\infty} \varphi(x)\,dx$ *сходится, то сходится и интеграл* $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$.

Определение 2. Несобственный интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится $\int\limits_a^{\infty} |f(x)|\,dx$. Несобст-

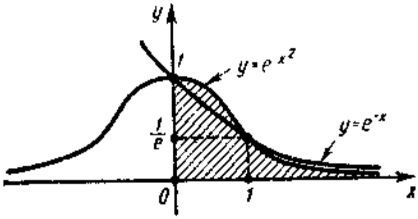


Рис. 47

венный интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ называется *условно сходящимся*, если он сходится, а $\int\limits_a^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ расходится.

Комментарии к теореме 2. 1) Если в теореме 2 положить $\varphi(x) \equiv |f(x)|$, то несобственный интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ является абсолютно сходящимся. Ясно, что в силу теоремы 2 абсолютно сходящийся интеграл сходится.

2) Все понятия и утверждения п. 2^0 сформулированы для несобственных интегралов вида (1). Аналогичные утверждения справедливы и для интегралов вида (2), (3).

Примеры. 1. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Решение. Это один из «неберущихся» интегралов, который имеет специальное название *интеграл Пуассона* и играет важную роль в теории вероятностей. Графиком подынтегральной функции $y=e^{-x^2}$ является *кривая Гаусса* (рис. 47).

Ясно, что $\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{1} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. Первый интеграл в сумме не является несобственным. Он численно равен площади под кривой Гаусса на отрезке [0, 1] и выражается конечным числом. Рассмотрим интеграл $\int\limits_1^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. Очевидно, $0<e^{-x^2}\leqslant e^{-x}$ при $x\geqslant 1$. Имеем

$$\int\limits_1^{\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x=\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^{b} e^{-x}\,\mathrm{d}x=\lim_{b\to\infty}(-e^{-x})\Big|_1^{b}=\frac{1}{e}.$$

Так как $\int\limits_1^{\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x$ сходится, то в силу теоремы 1 сходится и $\int\limits_1^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$, а следовательно, и интеграл Пуассона. Можно показать, что $\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}/2$ (см. пример 3 п. 4^0 § 2.7*). Из доказанного следует, что сходятся и несобственные интегралы $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx=\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx+\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$.

Действительно, интеграл Пуассона $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ равен площади, заштрихованной на рис. 47. Вследствие симметрии кривой Гаусса относительно оси Oy имеем $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx=\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\sin x}{x^2}\,dx$.

Решение. Здесь подынтегральная функция меняет знак. Ясно, что $\left|\frac{\sin x}{x^2}\right|\leqslant\frac{1}{x^2}$. Находим

$$\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\int\limits_{1}^{b}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{1}^{b}=1.$$

Так как $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^2}$ сходится, то по теореме 2 сходится и $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\sin x}{x^2}\,dx$, а на основании теоремы 1 сходится также $\int\limits_{1}^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x^2}\right|dx$. Следовательно, данный интеграл сходится абсолютно.

3. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}$.

Решение. Очевидно, что $\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}>\frac{1}{x}$ при $x>2$. Вычислим

$$\int\limits_{2}^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\int\limits_{2}^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\ln x\Bigg|_{2}^{b}=\infty.$$

Так как $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{dx}{x}$ расходится, то в силу теоремы 1 расходится и $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}$.

3°. Несобственные интегралы второго рода. Рассмотрим примеры, приводящие к таким интегралам.

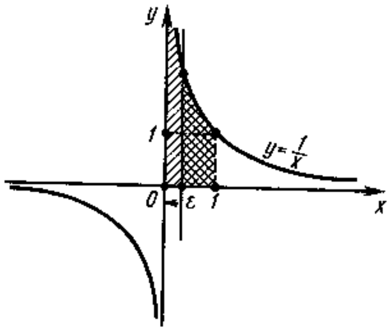


Рис. 48

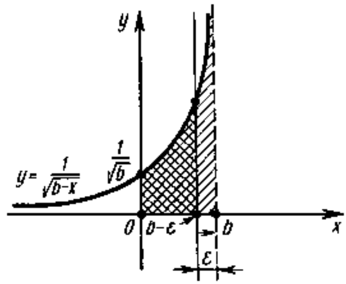


Рис. 49

Примеры. 1. Пусть требуется найти площадь S под кривой $y=1/x$, $0\leqslant x\leqslant 1$. Функция $y=1/x$ (рис. 48) имеет бесконечный разрыв при $x=0$. Площадь всей заштрихованной фигуры непосредственно вычислить трудно. Однако если отсечь бесконечный «хвост» прямой $x=\varepsilon$, то можно найти площадь дважды заштрихованной на рис. 48 криволинейной трапеции с помощью интеграла $\int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}$. При $\varepsilon\to 0$ мы должны получить в пределе площадь всей заштрихованной фигуры, т. е.

$$S=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\ln x\Big|_{\varepsilon}^{1}=\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\frac{1}{\varepsilon}=\infty.$$

Таким образом, в данном случае говорить о площади не имеет смысла.

2. Пусть требуется найти площадь S под кривой $y=1/\sqrt{b-x}$, $0\leqslant x\leqslant b$ (рис. 49; считаем, что $\sqrt{b-x}\geqslant 0$). Функция $y=1/\sqrt{b-x}$ не определена в точке $x=b$ отрезка $[0, b]$. Рассуждая, как и в примере 1, имеем

$$S=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0}^{b-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{b-x}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[-2\sqrt{b-x}\Big|_{0}^{b-\varepsilon}\right]=2\lim_{\varepsilon\to 0}(\sqrt{b}-\sqrt{\varepsilon})=2\sqrt{b}.$$

Следовательно, в данном случае площадь бесконечного «хвоста» равна конечному числу $2\sqrt{b}$.

Итак, иногда можно обобщить понятие определенного интеграла на случай неограниченной подынтегральной функции.

Определение 3. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервале $[a, b[$, а при $x=b$ либо не определена, либо имеет разрыв. Тогда конечный предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$ (если он существует) называется *несобственным интегралом второго рода*, т. е.

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

Аналогично определяется несобственный интеграл в тех случаях, когда подынтегральная функция $f(x)$ не определена или имеет разрыв при $x=a$:

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{5}$$

либо при $x=c$, где $c\in]a, b[$:

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\delta\to 0}\int\limits_{c+\delta}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{6}$$

Комментарии к определению 3. 1) Если существует конечный предел (4), то говорят, что несобственный интеграл (4) *сходится*; если же предел (4) либо не существует, либо бесконечен, то говорят, что интеграл (4) *расходится*. Так, в примере 1 несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x}$ расходится, а в примере 2 несобственный интеграл $\int\limits_0^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{b-x}} = 2\sqrt{b}$ сходится.

2) В левой части равенства (6) несобственный интеграл сходится тогда, когда существует и конечен каждый из пределов в правой части.

Примеры. 3. Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$

Решение. Подынтегральная функция на отрезке $[0, 1]$ не определена при $x=1$. По формуле (4) находим

$$\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin x\,\Big|_0^{1-\varepsilon} = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, данный интеграл сходится.

4. Вычислить $\int\limits_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}$.

Решение. Здесь подынтегральная функция имеет разрыв при $x=1$. По формуле (6) получим

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{\delta\to 0}\int_{1+\delta}^2 \frac{dx}{(x-1)^2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x-1}\right)\Bigg|_0^{1-\varepsilon} + \lim_{\delta\to 0}\left(-\frac{1}{x-1}\right)\Bigg|_{1+\delta}^2 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)+\lim_{\delta\to 0}\left(\frac{1}{\delta}-1\right)=\infty.$$

Значит, данный интеграл расходится.

4°. Признаки сходимости несобственных интегралов второго рода. Приведем без доказательства следующие утверждения.

Теорема 3. *Пусть при $x\in[a, b[$ выполнены неравенства $0\leqslant f(x)\leqslant\varphi(x)$ и функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ либо не определены, либо имеют разрыв при $x=b$. Тогда:*

1) *если $\int_a^b \varphi(x)dx$ сходится, то сходится и $\int_a^b f(x)dx$;*

2) *если $\int_a^b f(x)dx$ расходится, то расходится и $\int_a^b \varphi(x)dx$.*

Если подынтегральная функция меняет знак на отрезке интегрирования, то применяют следующий признак сходимости.

Теорема 4. *Пусть при $x\in[a, b[$ выполнено неравенство $|f(x)|\leqslant\varphi(x)$, $\varphi(x)\geqslant 0$, а функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ либо не определены, либо имеют разрыв при $x=b$. Тогда если $\int_a^b \varphi(x)dx$ сходится, то и $\int_a^b f(x)dx$ сходится.*

Комментарии к теоремам 3 и 4. 1) Для сравнения с подынтегральной функцией часто используют функции $1/(b-x)^\alpha$. Можно показать, что $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ сходится при $\alpha<1$ и расходится при $\alpha\geqslant 1$.

2) Теоремы 3 и 4 сформулированы для несобственных интегралов вида (4). Аналогичные утверждения можно сформулировать и для интегралов вида (5), (6).

Примеры. 1. Исследовать сходимость интеграла $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

Решение. Здесь подынтегральная функция имеет разрыв при $x=1$. Для сравнения возьмем функцию $1/(1-x)^{1/2}$. Очевидно, что $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ при $x\in[0, 1[$. Находим

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to0} \int_0^{1-\varepsilon} (1-x)^{-1/2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to0} 2\sqrt{1-x}\,\Big|_{1-\varepsilon}^{0} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0}(2-2\sqrt{\varepsilon}) = 2.$$

Так как $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ сходится, то в силу теоремы 3 сходится и $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

2. Исследовать сходимость интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}$.

Решение. Здесь подынтегральная функция имеет разрыв при $x=0$. При $x\in]0, 1]$ имеем $\frac{1}{e^x-\cos x} \geqslant \frac{1}{xe}$, так как $xe \geqslant e^x - \cos x$. Находим

$$\int_0^1 \frac{dx}{xe} = \frac{1}{e}\lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \frac{1}{e}\lim_{\varepsilon\to0}\ln x\,\Big|_\varepsilon^1 = \frac{1}{e}[0+\infty] = \infty.$$

Поскольку $\int_0^1 \frac{dx}{xe}$ расходится, в силу теоремы 3 расходится и $\int_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x}$.

5°. Упражнения

Вычислите несобственные интегралы первого рода:

1. $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$. 2. $\int_0^\infty x\,e^{-x^2}\,dx$. 3. $\int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

4. $\int_1^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2}$. 5. $\int_1^\infty \frac{\ln x\,dx}{x^2}$. 6. $\int_0^\infty x\sin x\,dx$.

7. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\,dx}{x^2+1}$. 8. $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x} \sin x\,dx$.

Исследуйте сходимость интегралов первого рода:

9. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{e^{-x}\,dx}{x}$. 10. $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+1}}$.

Вычислите несобственные интегралы второго рода:

11. $\int\limits_{2}^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$. 12. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$. 13. $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x \ln x}$.

14. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{x^2-4x+3}$. 15. $\int\limits_{0}^{1} x \ln x\,dx$. 16. $\int\limits_{a}^{b} \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$.

Исследуйте сходимость интегралов второго рода:

17. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$. 18. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$. 19. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}\,dx}{e^{\sin x}-1}$.

§ 2.7.* Интегралы, зависящие от параметра. Непрерывность. Дифференцирование и интегрирование по параметру. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Гамма- и бета-функции

1°. Интегралы, зависящие от параметра. Рассмотрим функцию $f(x, \alpha)$ двух переменных, определенную для всех x из конечного или бесконечного интервала $[a, b]$ и всех α из некоторого множества A. Пусть при каждом фиксированном значении $\alpha \in A$ функция $f(x, \alpha)$ интегрируема на $[a, b]$ в собственном или несобственном смысле. Тогда определенный интеграл

$$I(\alpha) = \int\limits_{a}^{b} f(x, \alpha)\,dx \tag{1}$$

является функцией параметра α.

Кроме того, от параметра α может зависеть не только подынтегральное выражение, но и сами пределы интегрирования, т. е.

$$I(\alpha) = \int\limits_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x, \alpha)\,dx. \tag{2}$$

Интегралы вида (1) и (2) называются *интегралами, зависящими от параметра.*

2°. Непрерывность, дифференцирование и интегрирование по параметру интеграла (1). Рассмотрим вопрос о непрерывности по α функции $I(\alpha)$, определяемой соотношением (1). Пусть множество $A \ni \alpha$ — конечный отрезок $[c, d]$. Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Если функция $f(x, \alpha)$ определена и непрерывна как функция от двух переменных в прямоугольнике $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant \alpha \leqslant d$, то интеграл* (1) *непрерывен по параметру α на отрезке $[c, d]$.*

Доказательство теоремы 1, а также доказательства последующих теорем данного параграфа можно найти в более подробных курсах.

Пример 1. Рассмотрим интеграл $I(\alpha)=\int\limits_0^{\pi} e^{\alpha x}\sin x\,dx$ при $\alpha\in[0, 1]$. Так как подынтегральная функция $f(x, \alpha)=e^{\alpha x}\sin x$ непрерывна при $0\leqslant x\leqslant\pi$ и $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, то в силу теоремы 1 интеграл $I(\alpha)$ является непрерывной функцией α на отрезке $[0, 1]$. Вычисляя интеграл по частям, получим

$$\int\limits_0^{\pi} e^{\alpha x}\sin x\,dx = -e^{\alpha x}\cos x\Big|_0^{\pi} + \alpha\int\limits_0^{\pi} e^{\alpha x}\cos x\,dx = e^{\alpha\pi}+1-\alpha^2\int\limits_0^{\pi} e^{\alpha x}\sin x\,dx.$$

Значит, $I(\alpha)=e^{\alpha\pi}+1-\alpha^2 I(\alpha)$ или $I(\alpha)=\dfrac{e^{\alpha\pi}+1}{1+\alpha^2}$, откуда ясно, что $I(\alpha)$ непрерывен по $\alpha\in[0, 1]$ (в данном случае $I(\alpha)$ непрерывен при любом значении α).

Рассмотрим теперь вопрос о дифференцировании интеграла (1) по параметру α на отрезке $[c, d]$.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x, \alpha)$ и ее частная производная $f'_{\alpha}(x, \alpha)$ определены и непрерывны в прямоугольнике $a\leqslant x\leqslant b$, $c\leqslant\alpha\leqslant d$. Тогда при любом $\alpha\in[c, d]$ справедливо равенство*

$$I'_{\alpha}(\alpha)=\left[\int\limits_a^b f(x, \alpha)\,dx\right]'_{\alpha}=\int\limits_a^b f'_{\alpha}(x, \alpha)\,dx. \tag{3}$$

Комментарии к теореме 2. 1) Для нахождения производной интеграла (1) по параметру α достаточно продифференцировать по α подынтегральную функцию.

2) Правило (3) называется *правилом Лейбница.*

Примеры. 2. Найти производную интеграла $\int\limits_0^{\pi} e^{\alpha x}\sin x\,dx$ по параметру α.

Решение. Имеем $f'_{\alpha}(x, \alpha)=(e^{\alpha x}\sin x)'_{\alpha}=e^{\alpha x}x\sin x$. Так как производная непрерывна для всех значений (x, α), то применима формула (3). Далее, находим

$$\left[\int\limits_0^{\pi} e^{\alpha x}\sin x\,dx\right]'_{\alpha}=\int\limits_0^{\pi} e^{\alpha x}x\sin x\,dx=\frac{\pi e^{\alpha\pi}(1+\alpha^2)-2\alpha(e^{\alpha\pi}+1)}{(1+\alpha^2)^2}.$$

Рекомендуем проверить, что получится тот же результат, если сначала вычислить данный интеграл (см. пример 1), а затем производную полученной функции по α.

3. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx$, где $0<a\leqslant b$.

Решение. Будем рассматривать интеграл как функцию параметра $b\geqslant a$ при фиксированном a. Тогда по теореме 2 получим

$$I'_b(b)=\left[\int\limits_0^1\frac{(x^b-x^a)}{\ln x}dx\right]'_b=\int\limits_0^1 x^b\,dx=\frac{x^{b+1}}{b+1}\Bigg|_0^1=\frac{1}{b+1}.$$

Итак, $I(b)=\int \frac{db}{1+b}+C=\ln(b+1)+C$. Для определения C положим $b=a$; тогда $I(a)=0$, т. е. $C=-\ln(a+1)$. Используя полученное значение, находим

$$\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx=\ln\frac{b+1}{a+1}.$$

Выясним, при каких условиях функцию (1) можно интегрировать по параметру α под знаком интеграла, т. е. когда справедливо соотношение

$$\int_c^d\left[\int_a^b f(x,\alpha)\,dx\right]d\alpha=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,\alpha)\,d\alpha\right]dx.$$

Опуская скобки, эту формулу можно записать в виде

$$\int_c^d d\alpha\int_a^b f(x,\alpha)\,dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x,\alpha)\,d\alpha. \tag{4}$$

Теорема 3. *Если функция $f(x,\alpha)$ непрерывна по переменным x и α в прямоугольнике $a\leqslant x\leqslant b$, $c\leqslant\alpha\leqslant d$, то справедлива формула* (4).

Пример 4. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx$, $0<a\leqslant b$.

Решение. Представим подынтегральное выражение в виде $\frac{x^b-x^a}{\ln x}=$ $=\int_a^b x^\alpha\,d\alpha$. Тогда по теореме 3 находим

$$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx=\int_0^1 dx\int_a^b x^\alpha\,d\alpha=\int_a^b d\alpha\int_0^1 x^\alpha\,dx=\int_a^b\frac{d\alpha}{\alpha+1}=\ln\frac{b+1}{a+1},$$

т. е. получен тот же результат, что и в примере 3.

3°. Непрерывность и дифференцирование по параметру интеграла (2). Для интеграла вида (2) справедливы аналоги теорем 1 и 2.

Теорема 4. *Пусть функция $f(x,\alpha)$ определена и непрерывна в прямоугольнике $a\leqslant x\leqslant b$, $c\leqslant\alpha\leqslant d$, а кривые $x=a(\alpha)$, $x=b(\alpha)$ при $\alpha\in[c,d]$ непрерывны и не выходят за его пределы. Тогда интеграл (2) является непрерывной функцией от α на отрезке $[c,d]$.*

Теорема 5. *Пусть выполнены все условия теоремы 4 и, кроме того, функция $f(x,\alpha)$ при $a\leqslant x\leqslant b$, $c\leqslant\alpha\leqslant d$ имеет непрерывную производную $f'_\alpha(x,\alpha)$, а также существуют производные $a'(\alpha)$ и $b'(\alpha)$. Тогда интеграл (2) имеет производную по параметру α, которая выражается формулой*

$$I'_\alpha(\alpha)=\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx+b'(\alpha)\,f(b(\alpha),\alpha)-a'(\alpha)\,f(a(\alpha),\alpha). \tag{5}$$

Примеры. 1. Найти производную функции $I(\alpha)=\int_\alpha^{\alpha^2} e^{-\alpha x^2}\,dx$ по параметру α.

Решение. Согласно формуле (5), имеем

$$I'_\alpha(\alpha)=\int\limits_\alpha^{\alpha^2}(e^{-\alpha x^2})'_\alpha\,dx+(\alpha^2)'\,e^{-\alpha(\alpha^2)^2}-\alpha'\,e^{-\alpha\cdot\alpha^2}=$$

$$=-\int\limits_\alpha^{\alpha^2}x^2e^{-\alpha x^2}\,dx+2\alpha e^{-\alpha^5}-e^{-\alpha^3}.$$

2. Найти производную функции $I(x)=\int\limits_0^x\frac{\ln(1+xy)}{y}\,dy\ (x>0)$ по параметру x.

Решение. По формуле (5) находим

$$I'_x(x)=\int\limits_0^x\left(\frac{\ln(1+xy)}{y}\right)'_x dy+x'\,\frac{\ln(1+x^2)}{x}=$$

$$=\int\limits_0^x\frac{y\,dy}{y(1+xy)}+\frac{\ln(1+x^2)}{x}=\frac{2}{x}\ln(1+x^2).$$

4°. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Рассмотрим теперь несобственные интегралы, зависящие от параметра, т. е. интегралы вида

$$I(\alpha)=\int\limits_a^\infty f(x,\ \alpha)\,dx, \tag{6}$$

где функция $f(x,\ \alpha)$ определена и интегрируема при $x\geqslant a$ для любого $\alpha\in A$. В силу определения несобственного интеграла (см. § 2.6) имеем

$$I(\alpha)=\int\limits_a^\infty f(x,\ \alpha)\,dx=\lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x,\ \alpha)\,dx. \tag{7}$$

Введем понятие равномерной сходимости интеграла (7) относительно параметра α.

Определение. Интеграл $I(\alpha)$ называется *равномерно сходящимся* относительно $\alpha\in A$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется не зависящее от α число $b_0\geqslant a$ такое, что при $b>b_0$ неравенство

$$\left|\int\limits_a^\infty f(x,\ \alpha)\,dx-\int\limits_a^b f(x,\ \alpha)\,dx\right|=\left|\int\limits_b^\infty f(x,\ \alpha)\,dx\right|<\varepsilon \tag{8}$$

будет выполнено для всех $\alpha\in A$.

Пример 1. Показать, что интеграл $\int\limits^\infty \alpha e^{-\alpha x}\,dx$ равномерно сходится относительно $\alpha\in[1,\ 2]$.

Решение. Используя подстановку $\alpha x=u$, получим

$$\int\limits_b^\infty \alpha e^{-\alpha x}\,dx=\int\limits_{\alpha b}^\infty e^{-u}\,du=\lim_{k\to\infty}\int\limits_{\alpha b}^k e^{-u}\,du=\lim_{k\to\infty}(-e^{-u})\Big|_{\alpha b}^k=e^{-\alpha b}.$$

Так как $e^{-\alpha b} \to 0$ при $b \to \infty$ и $\alpha \in [1, 2]$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует число $b_0 \geqslant 0$, удовлетворяющее всем условиям определения равномерной сходимости интеграла. Действительно, чтобы при $\alpha \in [1, 2]$ было выполнено неравенство $e^{-\alpha b} < \varepsilon$, достаточно выбрать b_0 так, чтобы выполнялось неравенство $e^{-b_0} < \varepsilon$, откуда $b_0 > \ln(1/\varepsilon)$. Очевидно, b_0 не зависит от α. Следовательно, интеграл $\int\limits_0^\infty \alpha e^{-\alpha x}\, dx$ сходится равномерно относительно $\alpha \in [1, 2]$.

Приведем без доказательства достаточное условие равномерной сходимости.

Теорема 6. *Пусть $f(x, \alpha)$ непрерывна по x при $x \geqslant a$. Если существует функция $\varphi(x)$, интегрируемая на $[a, \infty[$ и удовлетворяющая при всех $\alpha \in A$ неравенству*

$$|f(x, \alpha)| \leqslant \varphi(x), \quad x \geqslant a, \tag{9}$$

то интеграл (6) *сходится равномерно относительно $\alpha \in A$.*

Пример 2. Применим теорему 6 к интегралу $I(\alpha) = \int\limits_0^\infty \alpha e^{-\alpha x}\, dx$, $\alpha \in [1, 2]$.

Положим $\varphi(x) = 2/e^x$, так как при всех $\alpha \in [1, 2]$ и $x \geqslant 0$ справедливо неравенство $|\alpha e^{-\alpha x}| \leqslant 2/e^x$. Покажем, что функция $\varphi(x) = 2/e^x$ интегрируема на $[0, \infty[$. Имеем

$$\int\limits_0^\infty \frac{2}{e^x}\, dx = 2 \lim_{k \to \infty} \int\limits_0^k e^{-x}\, dx = 2 \lim_{k \to \infty} (-e^{-x}) \Big|_0^k = 2.$$

Значит, интеграл $\int\limits_0^\infty \alpha e^{-\alpha x}\, dx$ сходится равномерно относительно $\alpha \in [1, 2]$ (что было непосредственно доказано в примере 1).

Для равномерно сходящегося относительно параметра $\alpha \in A$ интеграла (6) справедливы аналоги теорем 1—3.

Теорема 7. *Если функция $f(x, \alpha)$ определена и непрерывна, как функция двух переменных при $x \geqslant a$ и $c \leqslant \alpha \leqslant d$ и интеграл* (6) *сходится равномерно относительно $\alpha \in [c, d]$, то:*

1) *интеграл* (6) *непрерывен по параметру $\alpha \in [c, d]$;*

2) *справедлива формула*

$$\int\limits_c^d d\alpha \int\limits_a^\infty f(x, \alpha)\, dx = \int\limits_a^\infty dx \int\limits_c^d f(x, \alpha)\, d\alpha; \tag{10}$$

3) *если, кроме того, производная $f'_\alpha(x, \alpha)$ непрерывна по обеим переменным при $x \geqslant a$ и $c \leqslant \alpha \leqslant d$, а интеграл $\int\limits_a^\infty f'_\alpha(x, \alpha)\, dx$ сходится равномерно относительно $\alpha \in [c, d]$, то при любом $\alpha \in [c, d]$ имеет место формула*

$$I'_\alpha(\alpha) = \left[\int\limits_a^\infty f(x, \alpha)\, dx\right]'_\alpha = \int\limits_a^\infty f'_\alpha(x, \alpha)\, dx. \tag{11}$$

Пример 3. Вычислить интеграл Пуассона $I = \int\limits_0^\infty e^{-x^2}\, dx$.

Решение. Применим подстановку $x = ut$, где $u > 0$. Тогда получим $I = u \int\limits_0^\infty e^{-u^2 t^2}\, dt$. Умножая обе части равенства на $e^{-u^2} du$ и интегрируя по параметру u в пределах от 0 до ∞, имеем

$$I\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = I^2 = \int_0^\infty e^{-u^2}u\,du\int_0^\infty e^{-u^2t^2}\,dt.$$

По формуле (10) находим

$$I^2 = \int_0^\infty dt\int_0^\infty e^{-u^2(1+t^2)}u\,du = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Так как $I > 0$, то $I = \int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

5°. Гамма- и бета-функции. Рассмотрим одну из важнейших функций математического анализа и его приложений — *гамма-функцию*, определяемую интегралом

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx. \tag{12}$$

Интеграл (12) называется *интегралом Эйлера второго рода*. Он сходится при любом $\alpha>0$. Действительно,

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx = \int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx + \int_1^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx.$$

Первый и второй интегралы в правой части сходятся при $\alpha>0$, так как $0 < \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx < 1/\alpha$, $0 < \int\limits_1^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx < \infty$ (проверьте это самостоятельно).

Рассмотрим некоторые свойства гамма-функции. Умножая равенство (12) на α и интегрируя по частям, получим

$$\alpha\Gamma(\alpha) = \alpha\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx = \alpha\left[\lim_{b\to\infty}\frac{x^\alpha}{\alpha e^x}\Big|_0^b + \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty x^\alpha e^{-x}\,dx\right] =$$

$$= \int_0^\infty x^\alpha e^{-x}\,dx = \Gamma(\alpha+1).$$

Следовательно, справедливо соотношение

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha). \tag{13}$$

Применяя равенство (13) многократно, получим

$$\Gamma(\alpha+n) = (\alpha+n-1)(\alpha+n-2)\ldots(\alpha+1)\,\alpha\Gamma(\alpha). \tag{14}$$

Таким образом, вычисление гамма-функции для произвольного аргумента α может быть сведено к вычислению ее значений для $\alpha\in]0,\,1]$ или $\alpha\in]1,\,2]$.

Положим в равенстве (12) $\alpha=1$. Тогда

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}(-e^{-x})\Big|_0^b = 1. \tag{15}$$

Полагая в соотношении (14) $\alpha=1$ и учитывая (15), находим

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\ldots 2\cdot 1\cdot\Gamma(1) = n!. \tag{16}$$

Следовательно, гамма-функция является естественным распространением на любые положительные значения аргумента n функции $n!$, определенной лишь для натуральных n.

С гамма-функцией тесно связана еще одна важная для приложений функция — *бета-функция*, определяемая интегралом

$$B(\alpha, \beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx. \tag{17}$$

Интеграл (17) называется *интегралом Эйлера первого рода*. Он является функцией двух параметров α и β и сходится при их положительных значениях.

Связь между гамма- и бета-функцией выражается формулой

$$B(\alpha, \beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \tag{18}$$

Гамма- и бета-функция не являются элементарными. Значения этих функций табулированы, их можно найти в специальных справочниках*.

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi/2} \sin^{2/3} x \cos^{5/2} x\,dx$.

Решение. Применяя подстановку $\sin x = y$, получим

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2/3} x \cos^{5/2} x\,dx=\int_0^1 y^{2/3}(1-y^2)^{3/4}\,dy=\int_0^1 y^{5/3-1}(1-y^2)^{7/4-1}\,dy.$$

Полагая $y^2=t$, по формулам (17) и (18) находим

$$\int_0^1 y^{5/3-1}(1-y^2)^{7/4-1}\,dy=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{5/6-1}(1-t)^{7/4-1}dt=\frac{1}{2}B\left(\frac{5}{6}, \frac{7}{4}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(5/6)\Gamma(7/4)}{\Gamma(31/12)}.$$

По таблицам гамма-функции, приведенным в справочнике, находим $\Gamma(7/4)=\Gamma(1{,}750)=0{,}91906$. Значения гамма-функции при $\alpha=5/6$ и $\alpha=31/12$ непосредственно по таблице найти нельзя, так как таблица составлена для значений аргумента $\alpha\in[1, 2]$. Используя формулу (13), имеем $\Gamma(5/6)=\Gamma(0{,}833)=(1/0{,}833)\cdot\Gamma(1{,}833)\approx 1{,}2\cdot 0{,}94114=1{,}12934$; $\Gamma(31/12)=\Gamma(2{,}583)=2{,}583\times\Gamma(1{,}583)\approx 2{,}583\cdot 0{,}89191=2{,}30380$. Округляя найденные значения до двух знаков после запятой, получим

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2/3} x \cos^{5/2} x\,dx=\frac{\Gamma(5/6)\Gamma(7/4)}{2\Gamma(31/12)}\approx\frac{1{,}13\cdot 0{,}92}{2\cdot 2{,}30}\approx 0{,}23.$$

---

* См., например: Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами/Под ред. Н. Абрамовица и И. Стиган. М., 1979.

Глава III

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 3.1. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Понятие об общем, частном и особом решениях дифференциальных уравнений

Дифференциальными уравнениями называются уравнения, в которых искомыми являются функции одной или нескольких переменных, причем в эти уравнения входят как сами искомые функции, так и их производные (или дифференциалы). Порядок старшей из производных или старшего из дифференциалов искомой функции называется *порядком* уравнения.

Если искомые функции, входящие в дифференциальное уравнение, зависят от нескольких аргументов и уравнение содержит частные производные этих функций по нескольким переменным, то такое уравнение называется *уравнением в частных производных*. Если же искомая функция зависит от одного аргумента, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*.

Например, уравнения $x\frac{dy}{dx}=y+x$, $\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+4y=e^x$, $(x^2+1)dx^3+(y^3+5)d^3y=0$ являются обыкновенными уравнениями соответственно первого, второго и третьего порядка. Здесь y — некоторая неизвестная искомая функция аргумента x; $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ — ее производные по x; dx и dy — дифференциалы аргумента x и функции y.

В настоящей главе будут рассмотрены лишь обыкновенные дифференциальные уравнения. К уравнениям такого вида приводят многие задачи физики и механики (см. § 3.2*).

1°. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. В общем виде *обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка* записывается так:

$$F(x, y, y')=0. \tag{1}$$

Соотношение (1) связывает независимую переменную x, искомую функцию $y=y(x)$ и ее первую производную y'. Здесь $F(x, y, y')$ — заданная функция от трех переменных x, y, y' на некотором множестве в трехмерном пространстве $\mathbf{R}^3$. Иногда уравнение (1) удается разрешить относительно производной, т. е. привести его к виду

$$y'=f(x, y). \tag{2}$$

Рассмотрим уравнение (2). Пусть G — открытое множество на плоскости $\mathbf{R}^2$, в котором функция $f(x, y)$ определена и непрерывна.

Определение 1. Решением (на интервале $I\subset\mathbf{R}$) дифференциального уравнения (2) называется дифференцируемая на интервале I функция $y=y(x)$, график которой лежит в G и которая обращает уравнение (2) в тождество для всех значений x из интервала I, т. е. $(x, y(x))\in G$, $y'(x)=f(x, y(x))$ $\forall x\in I$.

Решение y на интервале I, рассматриваемое на более узком интервале $I_1\subset I$, называется *сужением* решения y на интервал I_1. Каждое сужение решения y также является решением уравнения (2).

Если решение y не служит сужением ни одного решения уравнения, отличного от самого этого решения, то решение y называется *непродолжаемым* (максимальным). В подробных курсах доказывается, что каждое решение может быть продолжено до непродолжаемого и притом единственным способом, если выполнены определенные условия существования решения.

Определение 2. Решением в неявном виде (на интервале $I\subset\mathbf{R}$) дифференциального уравнения (2) называется соотношение $\Phi(x, y)=0$, определяющее $y(x)$ как неявную дифференцируемую функцию для всех $x\in I$, которая является решением уравнения (2) на интервале I.

Определение 3. График решения уравнения (2) на плоскости $\mathbf{R}^2$ называется *интегральной кривой* (линией) этого уравнения.

Комментарии к определениям 1—3. 1) Понятие решения, приведенное в определении 1, в противоположность понятию из определения 2 можно назвать *решением в явном виде* (на интервале $I\subset\mathbf{R}$).

2) Аналогично определяются понятия решений в явном и в неявном виде, а также интегральной кривой для дифференциального уравнения (1), не разрешенного относительно производной.

Процесс отыскания решений дифференциальных уравнений называется их *решением* (или интегрированием).

Примеры. 1. Проверить, является ли функция $y=2x$ решением дифференциального уравнения $xy'-y=0$.

Решение. Подставив функцию $y=2x$ и ее производную $y'=2$ в данное уравнение, получим тождество $x\cdot 2-2x\equiv 0$. Следовательно, $y=2x$ — решение уравнения.

2. Показать, что функция $y=Cx$, где $C\in\mathbf{R}$ — произвольная постоянная, является решением уравнения $xy'-y=0$.

Решение. Имеем $y=Cx$, $y'=C$. Подставив эти выражения в данное уравнение, получим тождество $xC-Cx\equiv 0$. Следовательно, функция $y=Cx$ при любом $C\in\mathbf{R}$ является решением данного уравнения. В частности, при $C=2$ получаем решение данного уравнения, указанное в примере 1.

3. Для дифференциального уравнения $yy'+x=0$ показать, что соотношение $x^2+y^2=C$ $(C\in\mathbf{R})$ является его решением в неявном виде.

Решение. Найдем производную по x функции $y=y(x)$, заданной неявно. Имеем $2x+2yy'=0$ $\forall x, y$, откуда $x+yy'\equiv 0$. Следовательно, при любом $C\in\mathbf{R}$ соотношение $x^2+y^2=C$ является решением данного уравнения в неявном виде.

Из примеров 2 и 3 видно, что дифференциальное уравнение может иметь бесконечное множество решений. Главной задачей теории дифференциальных уравнений является доказательство того, что они имеют решения, а затем — описание всех решений, а также установление условий, при которых уравнения однозначно разрешимы.

Рассмотрим частный случай уравнения (2), изучаемый в интегральном исчислении, а именно

$$y'=f(x), \quad x\in I\subset\mathbf{R}, \tag{3}$$

где $f(x)$ — заданная непрерывная на интервале $I\subset\mathbf{R}$ функция. Как известно (см. п. 2° § 1.1), все первообразные для функции $f(x)$ на I задаются формулой

$$y(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t+C, \quad x_0, x\in I, \tag{4}$$

где C — произвольная постоянная. Каждая первообразная $y(x)$, определяемая равенством (4), является решением уравнения (3). В гл. I было показано, что других решений это уравнение не имеет. Следовательно, соотношение (4) задает все решения уравнения (3). В этом случае решение (4), содержащее одну произвольную постоянную C, называется *общим решением* уравнения (3). Каждое решение, получающееся из общего решения при конкретных значениях произвольной постоянной C, называют *частным решением*. Чтобы выделить частное решение уравнения (3), достаточно задать значение первообразной $y=y(x)$ в какой-нибудь точке. Пусть, например, $y(x_0)=y_0$. Тогда из соотношения (4) имеем $y(x_0)=C$ или $C=y_0$, т. е. решение единственно и равно

$$y(x)=y_0+\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x_0,\ x\in I,\ y_0\in\mathbf{R}. \tag{5}$$

Примеры. 4. Решить уравнение $y'-\sin x=0$.

Решение. Запишем уравнение в виде $y'=\sin x$. Полагая в формуле (4), например, $x_0=\pi/2$, получим $y(x)=\int\limits_{\pi/2}^{x}\sin x\,\mathrm{d}x+C=$ $=-\cos x+C$, где C — произвольная постоянная.

5. Найти частное решение уравнения $y'-\sin x=0$, удовлетворяющее условию $y(0)=3$.

Решение. Здесь $x_0=0$, $y_0=3$. По формуле (5) находим

$$y(x)=3+\int\limits_{0}^{x}\sin t\,\mathrm{d}t=3-\cos t\Big|_0^x=3-\cos x+1=4-\cos x.$$

Заметим, что такой же результат получится, если сразу подставить данное условие в общее решение уравнения. Действительно, в примере 4 мы нашли, что общее решение указанного уравнения есть $y=-\cos x+C$. Подставив в это равенство $x=0$ и $y=3$, получим $3=-\cos 0+C$, откуда $C=4$. Следовательно, частное решение имеет вид $y=4-\cos x$.

Задача о нахождении частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего некоторым дополнительным условиям, часто встречается в приложениях. Если эти условия относятся к одному и тому же значению аргумента искомой функции, то их называют *начальными*. В том случае, когда начальные условия для дифференциального уравнения состоят в задании фиксированных значений искомой функции и ее производных, их называют *условиями Коши*, а задачу с условиями Коши — *задачей Коши*.

Задача Коши для дифференциального уравнения (2) формулируется так: найти такое решение уравнения (2), что $y(x_0)=y_0$, где x_0, y_0 — заданные числа (называемые начальными значениями или данными).

Так, в примере 5 была рассмотрена задача Коши с начальным условием $y(0)=3$.

Для частного случая уравнения (2), а именно для уравнения (3), решение задачи Коши задается формулой (5).

Пример 6. Решить задачу Коши: $y'-2x=0$, $y(1)=2$.

Решение. Согласно формуле (4), общее решение данного уравнения имеет вид $y=\int\limits_{0}^{x}2x\,\mathrm{d}x+C=x^2+C$. Подставляя в последнее равенство $x=1$ и $y=2$, получим $2=1+C$, откуда $C=1$. Частное решение $y=x^2+1$ является решением исходной задачи Коши.

Возникает вопрос, всегда ли задача Коши имеет решение и если ее решение существует, то является ли оно единственным. Для уравнения (2) ответ на этот вопрос дает следующая фундаментальная теорема об однозначной разрешимости задачи Коши.

Теорема 1 (о существовании и единственности решения задачи Коши). *Пусть в дифференциальном уравнении (2) функция $f(x, y)$ и ее частная производная f'_y определены и непрерывны на открытом множестве $D \subset \mathbf{R}^2$. Тогда в некоторой окрестности $|x-x_0|<\delta$ точки x_0 существует непрерывное решение $y(x)$ задачи Коши:*

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y), \quad y(x_0)=y_0, \quad (x_0, y_0)\in D. \tag{6}$$

Это решение единственно, т. е. если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — два непрерывных решения задачи Коши (6), то $y_1(x)=y_2(x)$ для всех x, при которых эти решения определены.

Доказательство этой теоремы приводится в более подробных курсах.

Комментарии к теореме 1. 1) Очевидно, что множество D из условий теоремы 1 является подмножеством множества G, фигурирующего в определении 1, т. е. $D\subseteq G\subset \mathbf{R}^2$.

2) Теорема 1 гарантирует существование решения только в некоторой малой окрестности точки x_0.

3) Уравнение (2) имеет бесконечное множество решений, зависящее от одного параметра. Действительно, при фиксированном x_0 различным начальным значениям y_0 таким, что $(x_0, y_0)\in D$, соответствуют различные решения; это условно записывается так: $y=y(x, y_0)$, где y_0 — параметр.

4) Геометрически теорема 1 означает следующее: при соблюдении ее условий через каждую точку $(x_0, y_0)\in D\subseteq G$ проходит единственная непродолжаемая интегральная кривая уравнения (2).

Определение 4. Множество $D\subseteq G\subset \mathbf{R}^2$, в каждой точке (x_0, y_0) которого существует и притом единственное решение задачи Коши (6), называется *областью единственности* для дифференциального уравнения (2).

Если для каждой точки (x_0, y_0) множества $D\subset\mathbf{R}^2$ выполнены условия теоремы 1, то D есть область единственности для уравнения (2).

Примеры. 7. Найти область единственности для уравнения $y'=2x$.

Решение. Функция $f(x, y)=2x$ и ее частная производная $f'_y=(2x)'_y=0$ непрерывны на всей плоскости $\mathbf{R}^2$; следовательно, в силу теоремы 1, $D=\mathbf{R}^2$ — область единственности для уравнения $y'=2x$.

8. Найти область единственности для уравнения $y'=-y/x$.

Решение. Функции $f(x, y) = -y/x$ и $f'_y = -1/x$ определены и непрерывны для всех точек плоскости $\mathbf{R}^2$, за исключением точек оси $x=0$. Значит, $D = \{(x, y) : x \neq 0\}$ есть область единственности.

2°. Общее, частное и особое решения уравнения первого порядка и их геометрический смысл. Рассмотрим уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной.

Определение 5. Пусть $D \subseteq G \subset \mathbf{R}^2$ есть область единственности для уравнения (2). Непрерывная функция $y(x, C)$, имеющая непрерывную частную производную по x, называется *общим решением* уравнения (2) в D, если:

1) соотношение $y = y(x, C)$ разрешимо относительно C для любой точки $(x, y) \in D$, т. е.

$$C = \psi(x, y), \tag{7}$$

причем функция $\psi(x, y)$ непрерывна;

2) функция $y(x, C)$ является решением уравнения (2) при всех значениях C, удовлетворяющих соотношению (7), когда точка (x, y) пробегает всю область единственности D.

Определение 6. Соотношение $\psi(x, y) = C$ (или функция ψ), определенное формулой (7), называется *общим решением в неявном виде* (или *общим интегралом*) уравнения (2) в области единственности $D \subseteq G$.

Определение 7. Решение уравнения (2), во всех точках которого выполняется свойство единственности решения задачи Коши, называется *частным решением*. Решение уравнения (2), во всех точках которого нарушено свойство единственности, называется *особым решением*.

Комментарии к определению 7. 1) Все решения, не удовлетворяющие данному определению, называются *составными*.

2) Особые решения уравнения (2) (если они существуют) можно найти без интегрирования этого уравнения. Интегральные линии особых решений лежат на границе области единственности.

По известному общему решению $y(x, C)$ уравнения (2) в области единственности D всегда можно найти решение задачи Коши для этого уравнения, если начальные значения (x_0, y_0) принадлежат D. Таким решением является функция $y(x, \psi(x_0, y_0))$. Отсюда следует, что все решения, полученные из общего решения при конкретном значении произвольной постоянной, являются частными (так, в примерах 2—4 п. 1° были указаны общие, а в примерах 1 и 5 п. 1° — частные решения уравнений).

Теорема 2 (о существовании общего решения). *Пусть f и f'_y определены и непрерывны на открытом множестве $D \subseteq G \subset \mathbf{R}^2$. Тогда для каждой точки $(x_0, y_0) \in D$ можно указать окрестность $U \subset D$, в которой существует общее решение уравнения* (2).

Доказательство этой теоремы приводится в более подробных курсах.

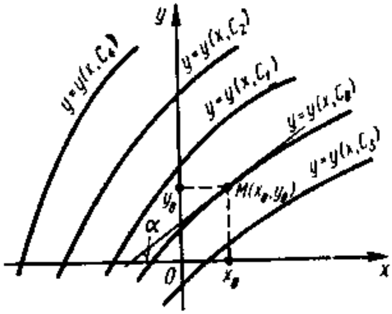


Рис 50

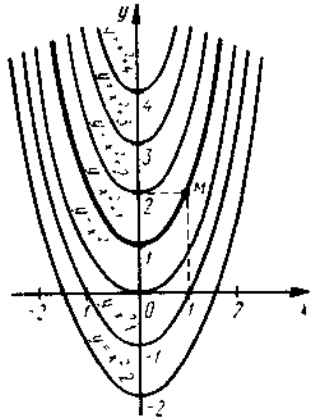


Рис 51

Комментарии к теореме 2. 1) Теорема 2 гарантирует существование общего решения только в некоторой малой окрестности точки $(x_0, y_0) \in D$.

2) Из теоремы 2 и определения 5 следует, что множество решений дифференциального уравнения (2) в окрестности каждой точки (x_0, y_0) области единственности D задается функцией $y(x, C)$, зависящей от одного параметра C.

3) Имеются дифференциальные уравнения, удовлетворяющие условиям теоремы 2 на множестве D, но для которых не существует общего решения на всем множестве D.

Пример 1. Рассмотрим уравнение $y' = y^2$. Так как функции $f = y^2$ и $f'_y = 2y$ определены и непрерывны на множестве $D = \mathbf{R}^2$, то в силу теоремы 2 общее решение существует в окрестности каждой точки плоскости xOy. Функция $y(x) = (C - x)^{-1}$, определенная при всех $x \neq C$, является общим решением в областях $y > 0$ и $y < 0$, а функция $y(x) = C(1 - Cx)^{-1}$, где $x \neq 1/C$, является общим решением в областях $xy > -1$ и $xy < -1$. Однако на всей плоскости xOy общее решение не существует.

Выясним геометрический смысл уравнения (2) и его решений. Каждой точке $M(x_0, y_0) \in G$ поставим в соответствие отрезок прямой, проходящей через M и имеющей угловой коэффициент $\operatorname{tg} \alpha = f(x_0, y_0)$ (рис. 50). Тем самым в G задается множество прямых, называемое полем прямых. Так как представляют интерес не сами эти прямые, а их направления, то принято говорить, что уравнение (2) определяет множество направлений в G, называемое *полем направлений*.

Угловой коэффициент касательной к кривой $y = y(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$ равен значению производной $y'(x_0, y_0)$ в этой точке. Поэтому интегральная кривая уравнения (2) в каждой точке

$M(x_0, y_0)$ имеет касательную с угловым коэффициентом $y'(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$. Следовательно, дифференцируемая функция $y(x)$ является решением уравнения (2) в том и только в том случае, когда ее график лежит в G и в каждой его точке направление касательной совпадает с полем направлений.

Этим пользуются для приближенного построения семейства интегральных кривых: сначала выбирают ряд точек на плоскости $\mathbf{R}^2$, затем вычисляют в них значения правой части и определяют угловой коэффициент касательных к интегральным кривым по формуле $k = \operatorname{tg}\alpha = f(x_0, y_0)$ и, наконец, отмечают полученные направления и приближенно проводят интегральные кривые.

Геометрически общее решение уравнения (2) представляет собой семейство интегральных кривых, зависящее от одного параметра C, а частное решение — одну из интегральных кривых этого семейства, проходящую через точку $M(x_0, y_0) \in D \subseteq G$. Чтобы выделить эту кривую из семейства $y(x, C)$, поступают следующим образом: вычисляют значение $C_0 = \psi(x_0, y_0)$ по формуле (7) и полученное значение подставляют в общее решение. Тогда функция $y = y(x, C_0)$ определяет частное решение, график которого проходит через точку $M(x_0, y_0)$.

Примеры. 2. Рассмотрим уравнение $y' = 2x$. Здесь $D = \mathbf{R}^2$, а общее решение данного уравнения имеет вид $y = x^2 + C$ (см. примеры 6 и 7 п. 1°). Этому общему решению соответствует семейство парабол (рис. 51). Через каждую точку плоскости проходит только одна парабола. Найдем уравнение параболы, проходящей через точку $M(1, 2)$. Для этого решим задачу Коши с начальным условием $y(1) = 2$. Имеем $2 = 1^2 + C$, откуда $C = 1$ и уравнение искомой параболы имеет вид $y = x^2 + 1$. На рис. 51 изображена интегральная кривая, проходящая через точку $M(1, 2)$.

3. Пусть дано уравнение $\dfrac{dy}{dx} = 3y^{2/3}$. Проинтегрируем его, рассматривая x как искомую функцию от y. Данное уравнение эквивалентно двум уравнениям $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{3y^{2/3}}$ и $y = 0$ (второе уравнение необходимо рассмотреть вследствие того, что исходное уравнение имеет решение $y = 0$, а преобразованное уравнение исключает его). Находим $x = \displaystyle\int \frac{dy}{3y^{2/3}}$ или $x = y^{1/3} + C$. Выражая y явно, получим общее решение $y = (x - C)^3$ исходного уравнения. Решение $y = 0$ является особым, так как в каждой точке оси Ox нарушено свойство единственности. Действительно, $f(x, y) = 3y^{2/3}$, $f'_y = 2y^{-1/3} = 2/\sqrt[3]{y}$, т. е. $D = \{(x, y) : y \neq 0\}$ — область единственности. Условия теоремы 1 о существовании и единственности решений нарушены в каждой точке особого решения $y = 0$.

Общее решение рассматриваемого уравнения есть семейство кубических парабол, смещающихся вправо с увеличением C (рис. 52).

Все эти интегральные кривые касаются особого решения $y=0$ и имеют с ним только одну общую точку.

Пусть Γ_0 — совокупность линий, определяемых особым решением $y=0$ и общим решением $y=(x-C)^3$. Если две различные линии из семейства Γ_0 имеют общую касательную в некоторой точке, то из частей этих линий можно составить новую линию, которая также есть интегральная линия. Соответствующее решение является составным.

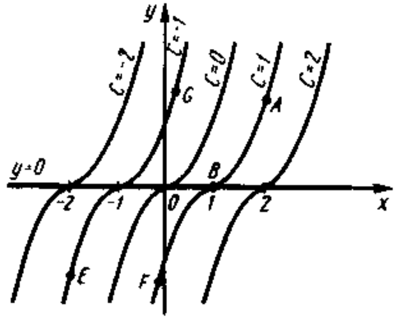


Рис. 52

Через каждую точку области D проходит только одна интегральная кривая (рис. 52). Если же присоединить к области D ось Ox, на которой нарушено условие непрерывности производной f'_y, и рассматривать интегральные кривые на всей плоскости $\mathbf{R}^2$, то через каждую точку $M\in\mathbf{R}^2$ пройдет бесконечное множество составных интегральных линий. Действительно, через точку A проходит верхняя ветвь линии, соответствующей $C=1$, по которой можно спуститься до точки B. Далее существует бесконечное множество продолжений: можно сместиться по оси Ox влево; можно спуститься до точки F по кривой, соответствующей $C=1$; можно по оси Ox достигнуть любой другой кривой, например той, для которой $C=-1$, и спуститься до точки E.

Пополнив семейство Γ_0 всевозможными составными решениями, получим семейство решений Γ_1, с помощью которого можно опять строить составные решения. Продолжая описанный процесс, получим совокупность расширяющихся семейств решений рассматриваемого уравнения, объединение которых дает совокупность всех решений уравнения $y'=3y^{2/3}$.

3⁰. Упражнения

Найдите общие решения уравнений:

1. $y'=\sin x$. 2. $y'=\operatorname{tg} x$, $x\in\,]-\pi/2,\ \pi/2[$.

3. $y'=\cos x$. 4. $y'=(1-x^2)^{-3/2}$, $x\in\,]-1,\ 1[$.

Решите задачи Коши

5. $y'=\cos x$, $y(0)=10$.

6. $y'=\operatorname{ctg} x$, $x\in\,]0,\ \pi[$, $y(\pi/2)=-1$.

7. $y'=1/\sqrt{1-x^2}$, $x\in\,]-1,\ 1[$, $y(0)=93$.

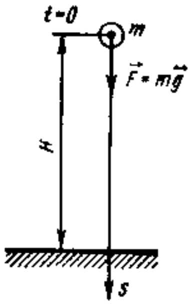


Рис. 53

§ 3.2*. Задачи, приводящие к обыкновенным дифференциальным уравнениям

Рассмотрим некоторые задачи механики и физики, приводящие к решению обыкновенных дифференциальных уравнений.

1°. Задача о свободном падении тела. Пусть с некоторой высоты H сброшено тело массы m (рис. 53). Требуется установить, за какое время тело достигнет земной поверхности (сопротивлением воздуха пренебречь).

Из условия ясно, что тело движется под действием силы тяжести $\vec{F}=m\vec{g}$. Направим ось s отсчета перемещения тела вертикально вниз так, чтобы ее начало совпало с начальным положением тела. Согласно второму закону Ньютона, имеем

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=mg, \tag{1}$$

где m — масса тела; $\dfrac{d^2s}{dt^2}$ — ускорение движущегося тела (вторая производная от перемещения по времени); g — ускорение свободного падения. Уравнение (1) является дифференциальным уравнением второго порядка. Сокращая на m, получим $s''=g$. Решая это уравнение (см. п. 2° § 3.5), находим

$$s'=gt+C_1,\ s=\frac{gt^2}{2}+C_1t+C_2. \tag{2}$$

Если в начальный момент $t=0$ скорость и перемещение соответственно были равны v_0 и s_0, то из уравнений (2) получим $v_0=C_1$, $s_0=C_2$. Тогда закон движения тела примет вид

$$s=\frac{gt^2}{2}+v_0t+s_0. \tag{3}$$

Если в равенстве (3) $v_0\neq 0$, $s_0=0$, то получаем известное из механики соотношение $s=\dfrac{gt^2}{2}+v_0t$. Если же $v_0=0$ и $s_0=0$, то $s=\dfrac{gt^2}{2}$. Подставляя теперь в равенство (3) значения $s=H$, $v_0=0$, $s_0=0$, получим формулу для определения времени свободного падения тела $t=\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$.

2°. Задача о переходном процессе в электрической цепи. В электрической цепи (рис. 54), содержащей активное сопротивление R, индуктивность L и электродвижущую силу (э. д. с.) E, в момент времени $t=0$ замыкается рубильник P. Найти закон, по которому изменяется ток i в этой цепи.

Согласно закону Ома для участка цепи, падение напряжения на активном сопротивлении составит R. При замыкании цепи в катушке L возникает э. д. с. самоиндукции, направленная противоположно току i и пропорциональная производной $\dfrac{di}{dt}$, причем коэффициент пропорциональности равен L. По второму закону Кирхгофа для RL-цепи при $t>0$ имеем $Ri=E-L\dfrac{di}{dt}$, откуда

$$L\frac{di}{dt}+Ri=E. \tag{4}$$

Уравнение (4) является линейным дифференциальным уравнением первого порядка с постоянными коэффициентами (см. п. 6° § 3.3). Непосредственной подстановкой можно проверить, что общим решением уравнения (4) является функция

$$i = \frac{E}{R} + \frac{1}{CR} e^{-(R/L)t}, \tag{5}$$

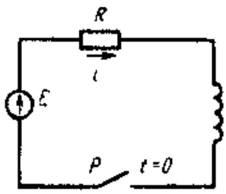


Рис. 54

где C — произвольная постоянная. Учитывая, что при $t=0$ в цепи нет электрического тока ($i=0$), имеем $\frac{E}{R} + \frac{1}{CR} = 0$, откуда $C = -1/E$. Подставляя значение C в равенство (5), получим закон изменения тока в RL-цепи

$$i = \frac{E}{R}(1 - e^{-(R/L)t}). \tag{6}$$

В формуле (6) член $e^{-(R/L)t}$ убывает с возрастанием t. Таким образом, установившееся значение тока по истечении достаточно большого промежутка времени с момента замыкания RL-цепи определяется величиной E/R (рис. 55). Заметим, что вычисление токов и напряжений в электрических цепях с помощью дифференциальных уравнений является классическим методом расчета цепей в электротехнике.

3°. **Задача о прожекторе.** Найти форму зеркала, отражающего все лучи, выходящие из данной точки, параллельно заданному направлению.

Рассмотрим плоское сечение зеркала (рис. 56). Совместим источник лучей с началом координат, а ось Oy направим вдоль указанного в условии направления. Через точку $M(x, y)$ проведем касательную к кривой, полученной в сечении зеркала плоскостью xOy. Рассмотрим луч OM. По законам оптики угол падения равен углу отражения (эти углы на рис. 56 обозначены через α); следовательно, $\angle OMN = \angle ONM$, т. е. $\triangle NOM$ — равнобедренный и $ON = OM$. Запишем уравнение касательной к искомой кривой в точке $M(x, y)$:

$$Y - y = y'(X - x), \tag{7}$$

где X, Y — текущие координаты касательной. Так как для точки $N(0, Y)$ имеем $X=0$, то из уравнения (7) получим $ON = Y = y - y'x$. Ясно, что $OM = \sqrt{x^2+y^2}$, откуда

$$y - y'x = \sqrt{x^2+y^2}. \tag{8}$$

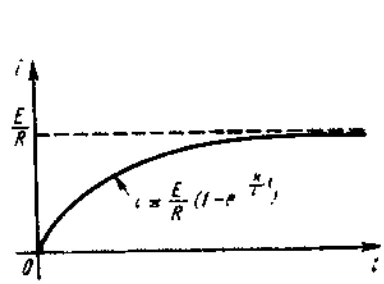


Рис. 55

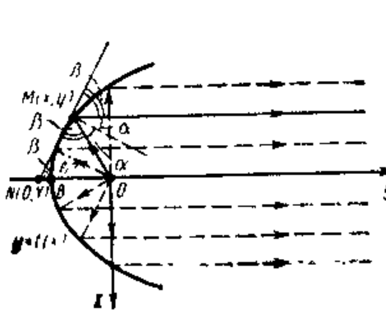


Рис. 56

Чтобы найти $y=f(x)$, нужно решить уравнение (8), которое является однородным дифференциальным уравнением первого порядка (см. п. 5° § 3.3). Можно проверить, что общее решение уравнения (8) имеет вид

$$y=\frac{x^2-C^2}{2C} \tag{9}$$

и представляет собой семейство парабол. Пусть вершиной параболы служит точка $B(0, -p/2)$; тогда $-\frac{p}{2}=\frac{0-C^2}{2C}$, откуда $C=p$. Подставляя в равенство (9) $C=p$, после элементарных преобразований получим уравнение плоского сечения зеркала $x^2=2p\left(y+\frac{p}{2}\right)$. Это — уравнение параболы с фокусным расстоянием $p/2$. Следовательно, точка, в которой находится источник лучей, является фокусом параболы. Итак, искомая зеркальная поверхность есть параболоид вращения, а источник лучей находится в его фокусе. Именно такие зеркала используются в прожекторах.

§ 3.3. Основные классы уравнений первого порядка, интегрируемых в квадратурах: уравнения в полных дифференциалах, с разделяющимися переменными, линейные, однородные, уравнение Бернулли

1°. Дифференциальные уравнения первого порядка в симметричной форме. Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка в симметричной относительно x и y форме:

$$M(x, y)\,\mathrm{d}x+N(x, y)\,\mathrm{d}y=0, \tag{1}$$

где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ — функции двух аргументов x, y, непрерывно дифференцируемые в некоторой области $D\subset\mathbf{R}^2$. При некоторых условиях уравнение (1) эквивалентно по крайней мере одному из дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{M(x, y)}{N(x, y)} \quad \text{или} \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{N(x, y)}{M(x, y)}. \tag{2}$$

Определение 1. Решением (в явном виде) уравнения (1) называется дифференцируемая функция $y=y(x)$ [или $x=x(y)$], определенная на интервале $I\subset\mathbf{R}$ и обращающая уравнение (1) в тождество при всех $x\in I$ (или при всех $y\in I$).

Более общим является понятие решения в параметрическом виде.

Определение 2. Параметрически заданная на интервале $I\subset\mathbf{R}$ гладкая функция $x=x(t)$, $y=y(t)$ называется *решением (в параметрическом виде)* уравнения (1), если выполнено тождество

$$M(x(t), y(t))\,\mathrm{d}x(t)+N(x(t), y(t))\,\mathrm{d}y(t)=0 \quad \forall t\in I.$$

Комментарий к определению 2. Функция (кривая) $x=x(t)$, $y=y(t)$ называется *гладкой* на интервале $I\subset\mathbf{R}$, если x и

y имеют непрерывные производные x'_t, y'_t, которые не обращаются в нуль одновременно.

Определение 3. Точка (x^*, y^*) называется *особой точкой* уравнения (1), если $M(x^*, y^*)=N(x^*, y^*)=0$.

Определение 4. График гладкой линии $x=x(t)$, $y=y(t)$, где $(x(t), y(t))$ — решение уравнения (1), называется *интегральной линией* (кривой) уравнения (1).

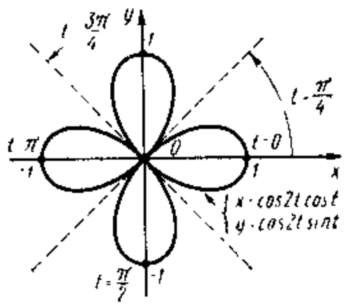


Рис 57

Пример. Уравнение $x(x^2-5y^2)\mathrm{d}x+$ $+y(5x^2-y^2)\mathrm{d}y=0$ имеет решение в параметрическом виде $x=\cos 2t\cos t$, $y=\cos 2t\sin t$, $t\in\mathbf{R}$. В этом легко убедиться непосредственной подстановкой данных функций в уравнение.

Интегральная линия данного уравнения изображена на рис. 57. Она проходит через точку $O(0, 0)$ при $t=\pi/4$ или при $t=3\pi/4$. В первом случае угловой коэффициент касательной равен 1, а во втором случае он равен -1. Точка $O(0, 0)$ является особой точкой данного уравнения.

Определение 5. Дифференциальное уравнение первого порядка называется *интегрируемым в квадратурах** (или просто интегрируемым), если его общее решение может быть получено с помощью конечного числа элементарных (алгебраических) операций и квадратур.

Пусть $M(x, y)$ и $N(x, y)$ непрерывны на открытом множестве $G\subset\mathbf{R}^2$. Пусть, далее, $D=G\setminus T$, где T — множество особых точек уравнения (1). Из непрерывности M и N, а также из определения особой точки следует, что для любой точки $(x_0, y_0)\in D$ можно указать такую круговую ее окрестность, в которой либо $M(x, y)\neq 0$, либо $N(x, y)\neq 0$. В этой окрестности уравнение (1) эквивалентно по крайней мере одному из уравнений вида (2). Если начальная точка (x_0, y_0) принадлежит D, то решение задачи Коши в некоторой окрестности этой точки является решением задачи Коши одного из уравнений (2). Поэтому из теоремы 1 § 3.1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть в области D выполняется одно из двух условий:* 1°) $M(x, y)\neq 0$, $\dfrac{\partial M}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ *существуют и непрерывны;* 2°) $N(x, y)\neq 0$, $\dfrac{\partial M}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial N}{\partial y}$ *существуют и непрерывны. Тогда D есть область единственности для второго из уравнений (2) в случае 1° и для первого из них в случае 2°.*

---

* Квадратурой называется отыскание первообразной

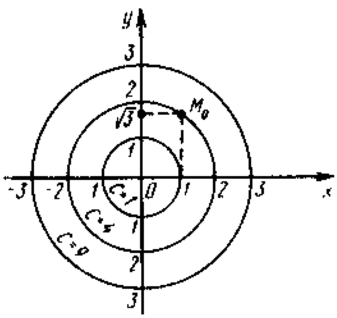


Рис 58

Если любое множество $E \subset D$, в котором либо $M \neq 0$, либо $N \neq 0$, является областью единственности для соответствующего уравнения (2), то D называется *областью единственности* для уравнения (1).

2°. Точные уравнения (уравнения в полных дифференциалах). *Определение 6.* Уравнение (1) называется *точным уравнением* (или уравнением *в полных дифференциалах*) на множестве G, если существует дифференцируемая функция $Q(x, y)$, для которой левая часть уравнения (1) является полным дифференциалом в G, т. е.

$$\mathrm{d}Q = \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial y}\,\mathrm{d}y = M(x, y)\,\mathrm{d}x + N(x, y)\,\mathrm{d}y \quad \forall (x, y) \in G.$$

Комментарии к определению 6. 1) Точное уравнение (1) равносильно уравнению $\mathrm{d}Q(x, y) = 0$. Очевидно, что его общим интегралом в $D = G \setminus T$ является соотношение $Q(x, y) = C$, где C принимает все допустимые значения. Это соотношение определяет всю совокупность интегральных кривых на плоскости $\mathbf{R}^2$.

2) Решение задачи Коши для уравнения (1) с начальными значениями (x_0, y_0) определяется соотношением $Q(x, y) = Q(x_0, y_0)$. Если (x_0, y_0) не является особой точкой точного уравнения (1), то задача Коши с начальными значениями (x_0, y_0) имеет единственное решение в окрестности этой точки.

Пример 1. Для уравнения $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = 0$ общий интеграл записывается в виде $x^2 + y^2 = C$ (это легко проверить непосредственным дифференцированием). Очевидно, что интегральные линии, определяемые общим интегралом, являются концентрическими окружностями с центром в начале координат. Решений с начальным условием $y(0) = 0$ уравнение не имеет (рис. 58). Поскольку точка $(0, 0)$ является особой, т. е. $(0, 0) \in T$, область единственности D такова: $D = \{(x, y) : x \neq 0 \text{ и } y \neq 0\}$. Решение задачи Коши с начальным условием $y(1) = \sqrt{3}$ имеет вид $x^2 + y^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2$, или $x^2 + y^2 = 4$ (что соответствует значению постоянной $C = 4$). На рис. 58 видно, что через точку $M_0(1, \sqrt{3})$ проходит интегральная кривая, соответствующая $C = 4$.

Теорема 2. *Пусть функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ непрерывно дифференцируемы на открытом множестве D. Для того чтобы уравнение (1) было точным, необходимо, чтобы выполнялось условие*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \forall (x, y) \in D. \tag{3}$$

Если множество D односвязно (т. е. представляет собой область), то условие (3) *является достаточным.*

Комментарий к теореме 2. Множество D называется *односвязным*, если любую лежащую в нем замкнутую кривую можно стянуть в точку, принадлежащую D. При этом в процессе стягивания кривая не должна выходить за пределы D.

Доказательство. Пусть уравнение (1) является точным. Тогда из определения точного уравнения и понятия полного дифференциала вытекает, что

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=M(x,\ y),\ \ \frac{\partial Q}{\partial y}=N(x,\ y)\quad \forall (x,\ y)\in D. \tag{4}$$

Дифференцируя первое равенство по y, а второе — по x, имеем $\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y}=\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 Q}{\partial y\partial x}=\frac{\partial N}{\partial x}$. Так как смешанные производные непрерывны, то они равны и, значит, справедливо условие (3).

Пусть D — односвязная область. Покажем, что в этом случае условие (3) является достаточным. Проинтегрируем первое из равенств (4) по x, считая y постоянным:

$$Q(x,\ y)=\int_{x_0}^{x} M(x,\ y)\,\mathrm{d}x+\varphi(y), \tag{5}$$

где x_0 — абсцисса любой точки из области единственности D; $\varphi(y)$ — постоянная интегрирования, зависящая от y. Подберем функцию $\varphi(y)$ так, чтобы выполнялось второе из равенств (4). Для этого продифференцируем равенство (5) по y, считая x постоянным:

$$\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\int_{x_0}^{x} M(x,\ y)\,\mathrm{d}x\right]+\varphi'(y)=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial M}{\partial y}\mathrm{d}x+\varphi'(y)=N(x,\ y). \tag{6}$$

С учетом равенства (3) соотношение (6) примет вид

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\partial N}{\partial x}\mathrm{d}x+\varphi'(y)=N(x;\ y),\ \text{или}\ \ N(x,\ y)-N(x_0,\ y)+\varphi'(y)=$$
$$=N(x,\ y).$$

Следовательно, $\varphi'(y)=N(x_0,\ y)$, т. е.

$$\varphi(y)=\int_{y_0}^{y} N(x_0,\ y)\,\mathrm{d}y, \tag{7}$$

где y_0 — ордината произвольной точки из области единственности D, а произвольную постоянную интегрирования считаем равной нулю. Из соотношений (5) и (7) получим

$$Q(x, y)=\int\limits_{x_0}^{x} M(x, y)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,\mathrm{d}y.$$

Итак, если в области D, не содержащей особых точек уравнения (1), выполнено условие (3), то общий интеграл уравнения (1) выражается формулой

$$\int\limits_{x_0}^{x} M(x, y)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,\mathrm{d}y=C, \quad (x_0, y_0)\in D, \tag{8}$$

где C принимает значения, при которых равенство (8) определяет интегральные линии в D. Заметим, что в равенстве (8) имеется только одна произвольная постоянная C.

Пример 2. Решить уравнение $\left(4-\frac{y^2}{x^2}\right)\mathrm{d}x+\frac{2y}{x}\,\mathrm{d}y=0$.

Решение. Очевидно, что $D=\{(x, y): x\neq 0\}$ — область единственности этого уравнения. Обозначим $M(x, y)=4-\frac{y^2}{x^2}$, $N(x, y)=$ $=2\frac{y}{x}$ и проверим выполнение условия (3): $\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{2y}{x^2}$, $\frac{\partial N}{\partial x}=$ $=-\frac{2y}{x^2}$, т. е. $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$.

Данное уравнение является точным и его общий интеграл имеет вид (8), где (x_0, y_0) — любая точка из области D. Положим, например, $x_0=1$ и $y_0=0$. Так как $(1, 0)\in D$, то

$$\int\limits_{1}^{x}\left(4-\frac{y^2}{x^2}\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{y}\frac{2y}{1}\,\mathrm{d}y=C.$$

Интегрируя, находим $4x-4+\frac{y^2}{x}-y^2+y^2=C$. Обозначив через $C_1=C+4$, получим общий интеграл исходного уравнения $4x+\frac{y^2}{x}=C_1$.

3°. Интегрирующий множитель. В том случае, когда условие (3) не выполняется, уравнение (1) не является точным. Однако его можно проинтегрировать, если найти такую функцию $\mu(x, y)\not\equiv 0$, заданную на открытом множестве $D_1\subset D$, при умножении на которую всех членов уравнения (1) оно становится точным:

$$\mu(x, y)M(x, y)\,\mathrm{d}x+\mu(x, y)N(x, y)\,\mathrm{d}y=0. \tag{9}$$

Такая функция называется *интегрирующим множителем* уравнения (1). Общее решение уравнения (9) совпадает с общим решением уравнения (1).

Докажем, что для всякого уравнения (1), где M и N — непрерывно дифференцируемые функции, существует интегрирующий множитель. Пусть уравнение (1) не является точным. В силу теоремы существования и единственности решения, оно имеет общее решение в неявном виде $u(x, y)=C$. Дифференцируя это равенство по x, получим $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$. Так как из уравнения (1) следует, что $\frac{dy}{dx}=-\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$, то $\frac{\partial u}{\partial x}\Big/M(x, y)=\frac{\partial u}{\partial y}\Big/N(x, y)$. Обозначим через μ общую величину этих двух равных отношений; тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\mu(x, y)M(x, y); \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\mu(x, y)N(x, y). \tag{10}$$

Поскольку $u(x, y)=C$ есть общий интеграл уравнения (1), имеем $\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=0$. Отсюда с учетом соотношений (10) получим уравнение вида (9), которое является точным. Следовательно, $\mu(x, y)$ — интегрирующий множитель уравнения (1).

Так как уравнение (9) является точным, то вследствие условия (3) интегрирующий множитель удовлетворяет соотношению $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=$ $=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$, или

$$M\frac{\partial\mu}{\partial y}-N\frac{\partial\mu}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=0. \tag{11}$$

Дифференциальное уравнение (11) является уравнением в частных производных относительно искомой функции $\mu(x, y)$. Любое его частное решение достаточно для нахождения интегрирующего множителя. Однако интегрирование уравнения (11) сложнее, чем интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений. Вместе с тем в некоторых важных частных случаях уравнение (11) имеет очевидное решение, определяющее искомый интегрирующий множитель. Рассмотрим эти частные случаи:

1. Отношение $\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\Big/N$ есть функция $g(x)$ только от x. Тогда функция $\mu(x)=\exp\left[\int g(x)\,dx\right]$ является интегрирующим множителем.

2. Отношение $\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\Big/M$ есть функция $p(y)$ только от y. Тогда функция $\mu(y)=\exp\left[-\int p(y)\,dy\right]$ является интегрирующим множителем.

Примеры. 1. Решить уравнение $(x^2-3y^2)dx+2xy\,dy=0$.

Решение. Здесь $M=x^2-3y^2$, $N=2xy$. Проверим выполнение условия (3): $\frac{\partial M}{\partial y}=-6y$, $\frac{\partial N}{\partial x}=2y$, $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$; следовательно, уравнение не является точным. Составим отношение

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{-6y-2y}{2xy}=-\frac{4}{x}=g(x).$$

Поскольку $g(x)$ есть функция только от x, интегрирующий множитель имеет вид

$$\mu(x)=\exp\left[\int\left(-\frac{4}{x}\right)\mathrm{d}x\right]=\mathrm{e}^{-4\ln x}=x^{-4}.$$

Здесь постоянная интегрирования для определенности взята равной нулю. Умножая исходное уравнение на интегрирующий множитель, получим

$$\left(\frac{1}{x^2}-\frac{3y^2}{x^4}\right)\mathrm{d}x+2\,\frac{y}{x^3}\,\mathrm{d}y=0.$$

Это уравнение является точным $\left(\text{действительно, } \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=-6\,\frac{y}{x^4}\right)$. Область единственности этого уравнения есть $D=\{(x,\,y):x\neq 0\}$. Полагая $x_0=1$, $y_0=0$, по формуле (8) находим общий интеграл

$$\int\limits_1^x\left(\frac{1}{x^2}-\frac{3y^2}{x^4}\right)\mathrm{d}x+\int\limits_0^y\frac{2y}{1^3}\,\mathrm{d}y=C.$$

Интегрируя, получим $-\frac{1}{x}+1+\frac{y^2}{x^3}-y^2+y^2=C$. Умножив обе части равенства на x^3, находим $y^2=C_1x^3+x^2$, где $C_1=C-1$.

2. Решить уравнение $(y+xy^2)\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y=0$.

Решение. Проверим выполнение условия (3): $\frac{\partial M}{\partial y}=1+2xy$, $\frac{\partial N}{\partial x}=-1$, $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$; следовательно, уравнение не является точным. Составим отношение

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{M}=\frac{1+2xy+1}{y+xy^2}=\frac{2}{y}=p(y).$$

Найдем интегрирующий множитель

$$\mu(y)=\exp\left[-\int\frac{2}{y}\,\mathrm{d}\,y\right]=\mathrm{e}^{-2\ln y}=y^{-2}.$$

Соответствующее точное уравнение имеет вид

$$\left(\frac{1}{y}+x\right)\mathrm{d}x-\frac{x}{y^2}\,\mathrm{d}y=0\quad\left(\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{1}{y^2}\right).$$

Область единственности этого уравнения есть $D=\{(x,\ y):y\neq 0\}$. Пусть $x_0=0$, $y_0=1$. Находим общий интеграл

$$\int\limits_0^x\left(\frac{1}{y}+x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_1^y\frac{0}{y^2}\,\mathrm{d}y=C,$$

откуда, интегрируя, получим $\dfrac{x}{y}+\dfrac{x^2}{2}=C$.

4°. Разделение переменных. Рассмотрим два частных случая уравнения (1), наиболее часто встречающихся на практике.

Определение 7. Пусть в уравнении (1) функции M и N зависят только от одного аргумента, т. е. $M=m(x)$ и $N=n(y)$. Уравнение вида

$$m(x)\,\mathrm{d}x+n(y)\,\mathrm{d}y=0 \tag{12}$$

называется *уравнением с разделенными переменными.*

Уравнение (12) является точным. Действительно, $\dfrac{\partial m}{\partial y}=\dfrac{\partial n}{\partial x}=0$, т. е. условие (3) выполнено. Согласно формуле (8), общий интеграл уравнения (12) имеет вид

$$\int\limits_{x_0}^x m(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{y_0}^y n(y)\,\mathrm{d}y=C. \tag{13}$$

Определение 8. Пусть в уравнении (1) функции M и N представлены в виде произведений двух функций, каждая из которых зависит только от одного аргумента, т. е. $M=m_1(x)n_1(y)$ и $N=m_2(x)n_2(y)$. Уравнение вида

$$m_1(x)n_1(y)\,\mathrm{d}x+m_2(x)n_2(y)\,\mathrm{d}y=0 \tag{14}$$

называется *уравнением с разделяющимися переменными.*

Комментарий к определениям 7 и 8. В формуле (13) каждое подынтегральное выражение зависит только от одного аргумента (от x или от y), т. е. переменные как бы разделены. Отсюда и происходят названия уравнений (12) и (14).

В общем случае уравнение (14) не является точным. Однако его можно свести к точному уравнению (12), если в качестве интегрирующего множителя взять

$$\mu(x,\ y)=\frac{1}{n_1(y)\,m_2(x)}. \tag{15}$$

Действительно, при умножении уравнения (14) на интегрирующий множитель (15) получим

$$\frac{m_1(x)}{m_2(x)}\,dx+\frac{n_2(y)}{n_1(y)}\,dy=0.$$

Последнее уравнение является уравнением вида (12), в котором $m(x)=\frac{m_1(x)}{m_2(x)}$ и $n(y)=\frac{n_2(y)}{n_1(y)}$. Следовательно, общий интеграл уравнения (14) имеет вид (13).

Примеры. 1. Решить уравнение $x+yy'=0$.

Решение. Запишем данное уравнение в виде (1). Так как $y'=\frac{dy}{dx}$, то, умножая обе части уравнения на dx, получим $x\,dx+$ $+y\,dy=0$. Здесь $M=x$, $N=y$; следовательно, это уравнение с разделенными переменными вида (12). Полагая $x_0=0$, $y_0=0$, по формуле (8) или (13) находим общий интеграл $\int\limits_0^x x\,dx+\int\limits_0^y y\,dy=C$. Интегрируя и умножая обе части равенства на 2, получим $x^2+y^2=$ $=C_1$, где $C_1=2C$.

2. Решить уравнение $x+xy+y'(y+xy)=0$.

Решение. Запишем данное уравнение в виде (1):

$$x(1+y)\,dx+(1+x)\,y\,dy=0.$$

Это уравнение не является точным, так как $\frac{\partial M}{\partial y}=x$, $\frac{\partial N}{\partial x}=y$, т. е. $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$. Однако оно является уравнением с разделяющимися переменными вида (14), где $m_1(x)=x$, $n_1(y)=1+y$, $m_2(x)=1+x$, $n_2(y)=y$. По формуле (15) находим интегрирующий множитель

$$\mu(x,\ y)=\frac{1}{n_1(y)\,m_2(x)}=\frac{1}{(1+y)(1+x)}.$$

Умножая все члены уравнения на $\mu(x, y)$, получим уравнение $\frac{x}{1+x}\,dx+\frac{y}{1+y}\,dy=0$ с разделенными переменными. Область единственности этого уравнения есть $D=\{(x,\ y):x\neq-1,\ y\neq-1\}$. Полагая $x_0=0$, $y_0=0$, находим общий интеграл

$$\int\limits_0^x\frac{x\,dx}{1+x}+\int\limits_0^y\frac{y\,dy}{1+y}=C.$$

Интегрируя, получим $x-\ln|x+1|+y-\ln|y+1|=\ln C_1$, где $\ln C_1=$ $=C$. Окончательно имеем $x+y=\ln(C_1|x+1|\,|y+1|)$.

5°. Однородные уравнения первого порядка. *Определение 9.* Функция $f(x, y)$ называется *однородной функцией степени n* относительно переменных x и y, если при любом λ справедливо тождество $f(\lambda x, \lambda y)=\lambda^n f(x, y)$.

Например, $f(x, y)=xy^3+x^2y^2$ есть однородная функция четвертой степени, так как $f(\lambda x, \lambda y)=(\lambda x)(\lambda y)^3+(\lambda x)^2(\lambda y)^2=\lambda^4(xy^3+x^2y^2)=\lambda^4 f(x, y)$.

Определение 10. Уравнение вида (1) называется *однородным*, если функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ являются однородными функциями одинаковой степени n.

В общем случае однородное уравнение не является точным, но оно может быть приведено к уравнению с разделенными переменными (12) относительно x и $u=y/x$, если выбрать интегрирующий множитель вида

$$\mu(x, y)=\frac{1}{M(x, y)x+N(x, y)y}, \text{ где } y=ux. \tag{16}$$

Докажем это. Так как уравнение является однородным, то $M(\lambda x, \lambda y)=\lambda^n M(x, y)$, $N(\lambda x, \lambda y)=\lambda^n N(x, y)$. Пусть $\lambda=1/x$ и $y/x=u$; тогда получим

$$M(1, u)=\frac{1}{x^n}M(x, y), \quad N(1, u)=\frac{1}{x^n}N(x, y). \tag{17}$$

Умножив уравнение (1) на $\mu(x, y)$, имеем

$$\frac{M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy}{M(x, y)x+N(x, y)y}=0.$$

Используя соотношения (17), перепишем последнее уравнение так:

$$\frac{M(1, u)\,dx+N(1, u)\,dy}{x[M(1, u)+N(1, u)u]}=0.$$

Поскольку $y=ux$, $dy=x\,du+u\,dx$, получим

$$\frac{[M(1, u)+N(1, u)u]\,dx+xN(1, u)\,du}{x[M(1, u)+N(1, u)u]}=0.$$

Разделив почленно числитель на знаменатель, приходим к уравнению с разделенными переменными относительно x и u:

$$\frac{dx}{x}+\frac{N(1, u)\,du}{M(1, u)+N(1, u)u}=0.$$

Общий интеграл этого уравнения находим по формуле (13) с последующей подстановкой $u=y/x$.

Пример. Решить уравнение $(x^2+y^2)\,dx-2xy\,dy=0$.

Решение. Обозначим $M(x, y)=x^2+y^2$ и $N(x, y)=-2xy$. Это уравнение не является точным, так как $\frac{\partial M}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial N}{\partial y}=-2x$, т. е. $\frac{\partial M}{\partial x}\neq\frac{\partial N}{\partial y}$. Проверим, является ли уравнение однородным: $M(\lambda x, \lambda y)=\lambda^2(x^2+y^2)=\lambda^2 M(x, y)$, $N(\lambda x, \lambda y)=-2\lambda^2 xy=\lambda^2 N(x, y)$. Поскольку M и N — однородные функции одинаковой (второй) степени, данное уравнение является однородным. По формуле (16) находим интегрирующий множитель

$$\mu(x, y)=\frac{1}{(x^2+y^2)x+(-2xy)y}, \text{ где } y=ux.$$

Умножая исходное уравнение на $\mu(x, y)$ и используя одновременно подстановку $y=ux$, $dy=x\,du+u\,dx$, получим

$$\frac{(x^2+u^2x^2)\,dx-2x(ux)[x\,du+u\,dx]}{(x^2+u^2x^2)x-2x(ux)\cdot(ux)}=0,$$

откуда после упрощений имеем

$$\frac{dx}{x}-\frac{2u\,du}{1-u^2}=0.$$

В результате получили уравнение с разделенными переменными вида (12). Его область единственности есть $D=\{(x, u): x\neq 0,\ u\neq \pm 1\}$. Полагая $x_0=1$, $u_0=2$, находим общий интеграл

$$\int_1^x \frac{dx}{x}-\int_2^u \frac{2u\,du}{1-u^2}=C.$$

Интегрируя и обозначая $C=\ln C_1$, имеем $\ln[x(u^2-1)]=\ln 3C_1$, или $x(u^2-1)=C_2$, где $C_2=3C_1$. Так как $u=y/x$, то $y^2-x^2=C_2x$.

6°. Линейные уравнения первого порядка. *Определение 11.* Дифференциальное уравнение вида

$$y'+P(x)y=Q(x)$$

называется *линейным уравнением первого порядка.*

Линейное уравнение первого порядка можно записать следующим образом:

$$[P(x)y-Q(x)]\,dx+dy=0. \tag{18}$$

Уравнение (18) является уравнением вида (1), где $M(x, y)=P(x)y-Q(x)$, $N(x, y)=1$. Ясно, что в общем случае уравнение (18) не является точным. Однако для него можно подобрать интегрирующий множитель, зависящий только от x. Составим отношение

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\Big/N=(P(x)-0)/1=P(x)=g(x).$$

Тогда интегрирующий множитель есть

$$\mu(x)=\exp\left[\int g(x)\,dx\right]=\exp\left[\int P(x)\,dx\right]. \tag{19}$$

Пример. Решить уравнение $y'+\frac{2}{x}y=x$.

Решение. Запишем данное уравнение в виде (1):

$$\left(\frac{2}{x}\,y-x\right)\mathrm{d}x+\mathrm{d}y=0.$$

Это уравнение не является точным, так как $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{2}{x}$, $\frac{\partial N}{\partial x}=0$, $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$. Однако данное уравнение является линейным, где $P(x)=2/x$, $Q(x)=x$. По формуле (19) находим интегрирующий множитель

$$\mu(x)=\exp\left[\int\frac{2}{x}\,\mathrm{d}x\right]=\mathrm{e}^{2\ln x}=x^2.$$

Умножив все члены уравнения на $\mu(x)=x^2$, получим

$$(2xy-x^3)\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y=0.$$

Последнее уравнение является точным, поскольку $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=2x$. Область единственности этого уравнения есть вся плоскость xOy. Полагая $x_0=0$, $y_0=0$, по формуле (8) получим общий интеграл

$$\int\limits_0^x(2xy-x^3)\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^y 0\cdot\mathrm{d}y=C,\ \text{откуда}\ x^2\left(y-\frac{x^2}{4}\right)=C.$$

Из этого выражения легко найти $y=\frac{x^2}{4}+\frac{C}{x^2}$. Отметим, что при этом из области единственности исключаются точки, для которых $x=0$. Однако здесь никакого сужения области решений не происходит, так как для исходного уравнения $x\neq0$.

7°. Уравнение Бернулли. *Определение 12.* Дифференциальное уравнение вида

$$y'+P(x)\,y=Q(x)\,y^n,\tag{20}$$

где $n\geqslant2$, называется *уравнением Бернулли.*

Уравнение Бернулли приводится к линейному уравнению первого порядка подстановкой $u=y^{1-n}$ и $u'=(1-n)\,y^{-n}y'$. Разделив уравнение (20) на y^n, получим

$$y'y^{-n}+P(x)\,y^{1-n}=Q(x).\tag{21}$$

Умножая все члены уравнения (21) на $1-n$ и используя подстановку $u=y^{1-n}$, имеем

$$u'+(1-n)\,P(x)\,u=(1-n)\,Q(x).\tag{22}$$

Уравнение (22) является линейным относительно u (см. п. 6°). Найдем его общий интеграл, а затем, подставив вместо u выражение y^{1-n}, получим общий интеграл уравнения Бернулли (20).

Примеры. 1. Решить уравнение $y'+\frac{1}{x}y=-y^2$.

Решение. Это уравнение Бернулли при $n=2$. Разделив все члены уравнения на y^2 и умножив на -1, имеем

$$-y'y^{-2}-\frac{1}{x}\cdot y^{-1}=1. \qquad (*)$$

Выполним в уравнении (*) подстановку $u=y^{-1}$, $u'=(-1)y^{-2}y'$; тогда получим линейное уравнение вида

$$u'-\frac{1}{x}\cdot u=1. \qquad (**)$$

Область единственности уравнения (**) есть $D=\{(x, y):x\neq 0\}$. Интегрирующим множителем этого уравнения является функция

$$\mu(x)=\exp\left[\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx\right]=\exp\left[\ln\frac{1}{x}\right]=\frac{1}{x}.$$

Умножая уравнение (**) на интегрирующий множитель, приведем его к уравнению в полных дифференциалах

$$\left(\frac{u}{x^2}+\frac{1}{x}\right)dx-\frac{1}{x}du=0.$$

Общий интеграл последнего уравнения имеет вид

$$\int_1^x\left(\frac{u}{x^2}+\frac{1}{x}\right)dx+\int_0^u(-1)\,du=C,$$

откуда $u=x\ln(Cx)$. Поскольку $u=y^{-1}$, из последнего соотношения получим общее решение исходного дифференциального уравнения $y=\dfrac{1}{x\ln(Cx)}$.

2. Решить уравнение $y'e^{x^2}=(xe^{x^2}-y^2)y$.

Решение. Приведем данное уравнение к виду

$$y'-xy=-e^{-x^2}\cdot y^3.$$

Это уравнение Бернулли при $n=3$. Применяя подстановку $u=y^{-2}$, $u'=-2y^{-3}y'$, получим линейное уравнение вида $u'+2xu=2e^{-x^2}$, интегрирующий множитель которого имеет вид $\mu(x)=\exp\left(\int 2x\,dx\right)=e^{x^2}$. Областью единственности является плоскость xOu. Соответствующее точное уравнение примет вид

$$2(xe^{x^2}u-1)\,dx+e^{x^2}\,du=0.$$

Общим интегралом этого уравнения является выражение

$$\int_0^x 2(xe^{x^2}u-1)\,dx+\int_0^u 1\cdot du=C,$$

откуда $ue^{x^2}=C+2x$. Учитывая, что $u=y^{-2}$, получим общее решение $y^2=e^{x^2}/(C+2x)$ исходного уравнения.

8⁰. Упражнения

Найдите общие решения уравнений:

1. $xy'-y=0$.
2. $x^2y'+y=0$.
3. $x+xy+y'(y+xy)=0$.
4. $y^2\,dx+(x-a)\,dy=0$.
5. $xy+y^2=(2x^2+xy)\,y'$.
6. $(a^2+x^2)\,y'+xy=1$.
7. $(2x+1)\,y'+y=x$.
8. $y'-y\operatorname{tg}x=\operatorname{ctg}x$.
9. $y'+xy=xy^3$.
10. $y'+y\cos x=\sin 2x$.

Решите задачи Коши.

11. $2y'\sqrt{x}=y$, $y(4)=1$.
12. $y'=(2y+1)\operatorname{ctg}x$, $y(\pi/4)=1/2$.
13. $y'=\dfrac{y^2}{x^2}-\dfrac{y}{x}$, $y(-1)=1$.
14. $3y^2y'+y^3=x+1$, $y(1)=-1$.

Покажите, что левые части следующих дифференциальных уравнений являются полными дифференциалами, и решите уравнения:

15. $(3x^2+2y)\,dx+(2x-3)\,dy=0$.
16. $(x\cos 2y+1)\,dx-x^2\sin 2y\,dy=0$.

Найдите интегрирующие множители и решите уравнения:

17. $(\sin x+e^y)\,dx+\cos x\,dy=0$.
18. $(x\sin y+y)\,dx+(x^2\cos y+x\ln x)\,dy=0$.

§ 3.4. Численные методы решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Метод Эйлера и его модификации. Метод Рунге — Кутта

В предыдущем параграфе мы рассмотрели некоторые дифференциальные уравнения, интегрируемые в квадратурах. Однако многие технические задачи приводят к решению задачи Коши для уравнений, которые проинтегрировать в квадратурах либо сложно, либо вообще невозможно. Поэтому в инженерной практике прибегают к приближенному решению задачи Коши.

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной:

$$y'=f(x,\ y). \tag{1}$$

Найти *приближенное численное решение задачи Коши* для дифференциального уравнения (1) с начальным условием $y(x_0)=y_0$ — это значит составить таблицу приближенных значений частного решения $y(x)$, удовлетворяющего заданному начальному условию.

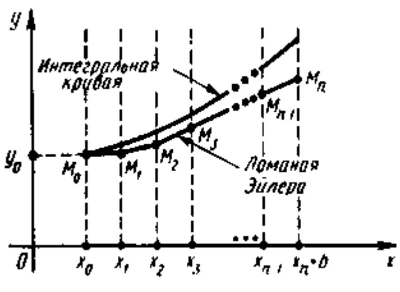


Рис 59

Очевидно, что эту задачу можно решить только в том случае, когда решение $y(x)$ существует и единственно, т. е. когда правая часть $f(x, y)$ уравнения (1) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения задачи Коши (см. п. 1° § 3.1).

1°. Метод Эйлера. Сущность метода Эйлера состоит в следующем. На плоскости xOy рассмотрим интегральную кривую, соответствующую некоторому частному решению $y(x)$ уравнения (1). Разобьем отрезок $[x_0, b]$ из области решений на n равных частей (рис. 59). Пусть $x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$ — точки деления. Через эти точки проведем прямые, параллельные оси Oy.

Как известно (см. п. 2° § 3.1), уравнение (1) определяет на плоскости xOy поле направлений, т. е. каждая интегральная кривая уравнения (1) в любой ее точке имеет касательную с угловым коэффициентом, равным значению функции f в этой точке. Поэтому для приближенного построения интегральнй кривой, соответствующей искомому частному решению, через начальную точку $M_0(x_0, y_0)$ проведем прямую с угловым коэффициентом $f(x_0, y_0)$ до пересечения с прямой $x=x_1$. Тогда получим точку $M_1(x_1, y_1)$, ординату которой y_1 можно определить из соотношения

$$y_1-y_0=f(x_0, y_0)(x_1-x_0). \tag{2}$$

Далее, из точки $M_1(x_1, y_1)$ проведем прямую с угловым коэффициентом $f(x_1, y_1)$ до пересечения с прямой $x=x_2$. Получим точку $M_2(x_2, y_2)$, ординату которой y_2 можно определить из соотношения

$$y_2-y_1=f(x_1, y_1)(x_2-x_1). \tag{3}$$

Аналогично, зная координаты точки $M_2(x_2, y_2)$, определим координаты точки $M_3(x_3, y_3)$ и т. д. Таким образом, на каждом малом промежутке изменения переменной x интегральная кривая уравнения (1) заменяется отрезком прямой (касательной). В результате получим ломаную линию, называемую *ломаной Эйлера*, заменяющую приближенно интегральную кривую.

Ординату y_k любой точки $M_k(x_k, y_k)$ ломаной Эйлера можно определить из соотношения

$$y_k-y_{k-1}=f(x_{k-1}, y_{k-1})(x_k-x_{k-1}), \tag{4}$$

аналогичного соотношениям (2) и (3). Так как отрезок $[x_0, b]$ разбит на равные части, то $x_k-x_{k-1}=h$, где h — некоторое число. Тогда абсциссу x_k точки $M_k(x_k, y_k)$ можно вычислить по формуле

$$x_k = x_0 + kh, \tag{5}$$

а соответствующее ей приближенное значение y_k искомого частного решения — по формуле

$$y_k = y_{k-1} + f(x_{k-1}, y_{k-1})\,h. \tag{6}$$

Результаты заносим в таблицу. Постоянная h в соотношении (5) называется *шагом таблицы*.

Пример. Используя метод Эйлера, составить таблицу приближенных значений частного решения уравнения $y' = 0{,}5xy$, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 1$, на отрезке $[0, 1]$ с шагом $h = 0{,}1$.

Решение. Проверим выполнение на отрезке $[0, 1]$ условий теоремы существования и единственности: $f(x, y) = 0{,}5xy$, $f'_y = 0{,}5x$; следовательно, область единственности решений $D = \mathbf{R}^2$. Согласно условию, имеем $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0{,}1$. По формулам (5) и (6) вычисляем значения $x_1 = 0{,}1$, $y_1 = 1$, затем — значения x_2 и y_2 и т. д. Результаты вычислений заносим в следующую таблицу:

k	x_k	y_k	$f(x_k, y_k)$	$f(x_k, y_k)h$
0	0	1	0	0
1	0,1	1	0,05	0,005
2	0,2	1,005	0,1005	0,0100
3	0,3	1,0150	0,1522	0,0152
4	0,4	1,0303	0,2061	0,0206
5	0,5	1,0509	0,2627	0,0263
6	0,6	1,0772	0,3232	0,0323
7	0,7	1,1095	0,3883	0,0388
8	0,8	1,1483	0,4593	0,0459
9	0,9	1,1942	0,5374	0,0537
10	1,0	1,2479		

2°. Метод Рунге—Кутта (метод Эйлера с уравниванием). Метод Эйлера, описанный в п. 1°, очень прост для вычислений, но имеет недостаток: при значительном изменении x приближенные значения y могут сильно отличаться от точных, так как погрешность накапливается с каждым шагом (см. рис. 59). Значительно лучшие результаты можно получить, применив в методе Эйлера уравнивание, состоящее в следующем. Обозначим значение y_k, вычисленное по формуле (6), через $y_k^{(1)}$ и уточним это значение по формуле

$$y_k^{(2)} = y_{k-1} + \frac{1}{2}\left[f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f\left(x_k, y_k^{(1)}\right)\right]h. \tag{7}$$

Найденное значение снова можно уточнить по аналогичной соотношению (7) формуле

$$y_k^{(3)} = y_{k-1} + \frac{1}{2}\left[f(x_{k-1},\ y_{k-1}) + f(x_k,\ y_k^{(2)})\right] h$$

и т. д. Этот процесс продолжаем до тех пор, пока в пределах заданной точности не совпадут результаты двух последовательных вычислений. Затем тем же методом вычисляем y_{k+1} и т. д.

Пример. Используя метод Рунге—Кутта, решить пример п. 1°. Вычисления вести с точностью до четырех десятичных знаков.

Решение. Воспользуемся таблицей на с. 151. Имеем $y_0 = 1$, $f(x_0,\ y_0) = 0$, $y_1^{(1)} = 1$, $f(x_1,\ y_1^{(1)}) = 0{,}5 \cdot 0{,}1 \cdot 1 = 0{,}05$. По формуле (7) получим

$$y_1^{(2)} = y_0 + \frac{1}{2}\left[f(x_0,\ y_0) + f(x_1,\ y_1^{(1)})\right] h =$$
$$= 1 + 0{,}5(0 + 0{,}05)\,0{,}1 = 1{,}0025.$$

Вычисляем $f(x_1,\ y_1^{(2)}) = 0{,}5 \cdot 0{,}1 \cdot 1{,}0025 = 0{,}0501$. Тогда по формуле (7) находим

$$y_1^{(3)} = y_0 + 0{,}5\left[f(x_0,\ y_0) + f(x_1,\ y_1^{(2)})\right] h =$$
$$= 1 + 0{,}5\,(0 + 0{,}0501)\,0{,}1 = 1{,}0025.$$

Таким образом, с точностью до четырех десятичных знаков $y_1^{(2)} = y_1^{(3)} = 1{,}0025 = y_1$ и т. д. Результаты вычислений заносим в следующую таблицу:

k	x_k	y_k	$f(x_k,\ y_k)$	$f(x_k,\ y_k)h$	$e^{x^2/4}$
0	0	$y_0 = 1$	0	0	1
1	0,1	$y_1^{(2)} = y_1^{(3)} = y_1 = 1{,}0025$	0,0501	0,0050	1,0025
2	0,2	$y_2^{(1)} = y_2^{(2)} = y_2 = 1{,}0100$	0,1010	0,0101	1,0100
3	0,3	$y_3^{(1)} = y_3^{(2)} = y_3 = 1{,}0227$	0,1534	0,0153	1,0227
4	0,4	$y_4^{(3)} = y_4^{(4)} = y_4 = 1{,}0408$	0,2082	0,0208	1,0408
5	0,5	$y_5^{(2)} = y_5^{(3)} = y_5 = 1{,}0646$	0,2661	0,0266	1,0645
6	0,6	$y_6^{(2)} = y_6^{(3)} = y_6 = 1{,}0943$	0,3283	0,0328	1,0942
7	0,7	$y_7^{(2)} = y_7^{(3)} = y_7 = 1{,}1305$	0,3957	0,0396	1,1303
8	0,8	$y_8^{(2)} = y_8^{(3)} = y_8 = 1{,}1738$	0,4695	0,0470	1,1735
9	0,9	$y_9^{(2)} = y_9^{(3)} = y_9 = 1{,}2248$	0,5512	0,0551	1,2244
10	1,0	$y_{10}^{(3)} = y_{10}^{(4)} = y_{10} = 1{,}2845$			1,2840

В данном случае можно найти точное решение уравнения, имеющее вид $y = e^{x^2/4}$ (значения этой функции помещены в последнем столбце таблицы). Сравнивая значения y_k в таблицах на с. 151 и 152 со значениями функции $y = e^{x^2/4}$, заключаем, что метод Рунге—Кутта позволяет получить лучшие результаты, чем метод

Эйлера. Можно показать, что метод Рунге—Кутта дает на каждом шаге погрешность, порядок которой не превышает h^5, поэтому он нередко применяется в вычислительной практике. Однако существуют численные методы, позволяющие получить более точные результаты и сделать это значительно быстрее. Эти методы изучаются в более подробных курсах

3°. Упражнения

Используя метод Рунге — Кутта, составьте таблицу приближенных значений частного решения заданного уравнения, удовлетворяющего указанному начальному условию, на отрезке $[0, 1]$ с шагом $h=0,1$.

1. $y'=x^2+0{,}3y^2+1$; $y(0)=0$; проведите вычисления с точностью до двух десятичных знаков.

2. $y'=-2xy^2$; $y(0)=1$; проведите вычисления с точностью до трех десятичных знаков

§ 3.5. Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Уравнения, допускающие понижение порядка

1°. Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. В общем виде обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка записывается так:

$$F(x,\ y,\ y',\ y'',\dots,\ y^{(n)})=0,\quad n\geqslant 2. \tag{1}$$

Соотношение (1) связывает независимую переменную x, искомую функцию $y=y(x)$ и ее производные $y', y'',\dots,y^{(n)}$. Здесь F—заданная функция от $n+1$ переменных в некоторой области $(n+1)$-мерного пространства $\mathbf{R}^{n+1}$.

Иногда уравнение (1) можно разрешить относительно старшей производной $y^{(n)}$ Тогда оно примет вид

$$y^{(n)}=f(x,\ y,\ y',\ y'',\dots,\ y^{(n-1)}),\quad n\geqslant 2, \tag{2}$$

где f — заданная функция. Частным случаем уравнения (2) является линейное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$a_0(x)\,y^{(n)}+a_1(x)\,y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}(x)\,y'+a_n(x)\,y=r(x), \tag{3}$$

где $a_i(x)$ $(i=0,\ 1,\dots,n)$, $r(x)$ — заданные функции от x.

Определение 1. *Решением* на интервале $I\subset\mathbf{R}$ дифференциального уравнения (1) называется дифференцируемая n раз на интервале I функция $y=y(x)$, обращающая уравнение (1) в тождество, т. е. $F(x, y(x), y'(x),\dots,y^{(n)}(x))\equiv 0$.

Примеры. 1. Показать, что функция $y=\dfrac{x^4}{12}+C_1x+C_2$ является решением уравнения второго порядка $y''-x^2=0$ при любых значениях C_1 $C_2\in\mathbf{R}$

Решение. Находим $y'=\frac{x^3}{3}+C_1$, $y''=x^2$, откуда $y''-x^2\equiv0$. Следовательно, данная функция есть решение уравнения при любых значениях постоянных C_1, C_2.

2. Показать, что функция $y=\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3$ является решением уравнения третьего порядка $y'''=x$ при любых значениях $C_1, C_2, C_3\in\mathbf{R}$.

Решение. Находим $y'=\frac{1}{6}x^3+C_1x+C_2$, $y''=\frac{1}{2}x^2+C_1$, откуда $y'''\equiv x$. Следовательно, данная функция есть решение исходного уравнения при любых значениях постоянных C_1, C_2, C_3.

Из примеров 1 и 2 видно, что при интегрировании дифференциального уравнения n-го порядка (2) получается семейство решений, заданное функцией, зависящей от n произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$:

$$y=y(x,\ C_1,\ C_2,\dots,C_n). \tag{4}$$

Следовательно, задача Коши для дифференциального уравнения n-го порядка должна содержать n начальных условий.

Задача Коши для дифференциального уравнения (2) формулируется так: найти решение $y=y(x)$ уравнения (2), удовлетворяющее *начальным условиям*

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\dots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}, \tag{5}$$

где x_0, y_0, y_0', ..., $y_0^{(n-1)}$ — заданные числа (называемые *начальными значениями*).

Ответ на вопрос об однозначной разрешимости задачи Коши для уравнений (2) и (3) дают следующие теоремы существования и единственности решения задачи Коши:

Теорема 1. *Пусть в уравнении* (2) *функция* f *и ее частные производные* $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ *определены и непрерывны на некотором открытом множестве* $D\subset\mathbf{R}^{n+1}$. *Тогда в некоторой окрестности* $|x-x_0|<\delta$ *точки* x_0 *существует непрерывное решение* $y(x)$ *задачи Коши* (2), (5), *где* $(x_0,\ y_0,\ y_0',\dots,y_0^{(n-1)})\in D$. *Это решение единственно, т. е. если* $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$ — *решения задачи Коши* (2), (5) *на некоторых интервалах, содержащих* x_0, *то* $y_1(x)=y_2(x)$ *для всех тех значений* x, *при которых оба эти решения определены.*

Теорема 2. *Пусть* $a_0(x)$, ..., $a_n(x)$, $f(x)$ — *непрерывные функции от* x *на интервале* $I\subset\mathbf{R}$ и $a_0(x)$ *не обращается в нуль в любой точке этого промежутка. Тогда существует единственное решение уравнения* (3), *которое непрерывно на интервале* I *и удовлетворяет начальным условиям* (5), *где* $x_0\in I$.

Доказательства этих теорем можно найти в более полных курсах.

Определение 2. Множество $D \subset \mathbf{R}^{n+1}$, в каждой точке которого существует и притом единственное решение задачи Коши, называется *областью единственности* для соответствующего уравнения.

Определим понятия общего и частного решений для уравнения n-го порядка вида (2).

Определение 3. Пусть $D \subset \mathbf{R}^{n+1}$ есть область единственности для уравнения (2). Функция (4), дифференцируемая n раз по x, называется *общим решением* (в явном виде) уравнения (2) в D, если:

1) система n уравнений

$$\begin{cases} y = y(x,\ C_1,\ C_2, \ldots, C_n), \\ y' = y'(x,\ C_1,\ C_2, \ldots, C_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)} = y^{(n-1)}(x,\ C_1,\ C_2, \ldots, C_n) \end{cases} \tag{6}$$

однозначно разрешима относительно C_1, C_2, ..., C_n при всех $(x,\ y,\ y', \ldots, y^{(n-1)}) \in D$, т. е.

$$\begin{cases} C_1 = \psi_1(x,\ y,\ y', \ldots, y^{(n-1)}), \\ C_2 = \psi_2(x,\ y,\ y', \ldots, y^{(n-1)}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_n = \psi_n(x,\ y,\ y', \ldots, y^{(n-1)}); \end{cases} \tag{7}$$

2) функция (4) является решением уравнения (2) при всех значениях C_1, C_2, ..., C_n, удовлетворяющих системе (7), когда $(x,\ y,\ y', \ldots, y^{(n-1)}) \in D$.

. *Определение 4.* Решение уравнения (2), во всех точках которого имеет место свойство единственности решения задачи Коши, называется *частным решением* этого уравнения.

Комментарии к определениям 3 и 4. Из этих определений следует, что если существует общее решение (4), то по известным начальным значениям $(x_0,\ y_0,\ y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in D$ всегда можно найти решение задачи Коши, удовлетворяющее начальным условиям (5). Это решение является частным.

В примерах 1 и 2 были указаны общие решения дифференциальных уравнений соответственно второго и третьего порядка.

Пример 3. Решить задачу Коши для уравнения $y''' - x = 0$ с начальными условиями $y(0) = 5$, $y'(0) = -2$, $y''(0) = 7$.

Решение. Это — уравнение третьего порядка вида (2), где $f = x$. Найдем область единственности. Имеем $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y'} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y''} = 0$. Эти функции непрерывны в пространстве $\mathbf{R}^4$; следовательно, $D = \mathbf{R}^4$ и для любой точки из D задача Коши однозначно разрешима. Известно (см. пример 2), что общее решение данного уравнения имеет вид $y=\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3$. Дифференцируя дважды, имеем $y'=\frac{1}{6}x^3+C_1x+C_2$ и $y''=\frac{1}{2}x^2+C_1$. Подставляя $x=0$, $y=5$, $y'=-2$, $y''=7$ в последние три равенства, получим систему, имеющую решение $C_1=7$, $C_2=-2$, $C_3=5$. Функция $y=\frac{1}{24}x^4+\frac{7}{2}x^2-2x+5$ является решением задачи Коши.

2^0. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка. Часто решение уравнений высшего порядка с помощью специальных подстановок можно свести к решению уравнений более низкого порядка. В этом случае говорят, что *уравнение допускает понижение порядка*. Рассмотрим три типа таких уравнений.

1. Уравнение вида

$$y^{(n)}=f(x) \tag{8}$$

с помощью подстановки $y^{(n-1)}=u(x)$ сводится к двум уравнениям первого и $(n-1)$-го порядков:

$$u'=f(x),\ \ y^{(n-1)}=u(x). \tag{9}$$

Первое из уравнений (9) имеет решение $u(x)=\int\limits_{x_0}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t+C_1$ (см. § 3.1). Второе из уравнений (9) имеет тот же вид, что и уравнение (8), но порядок на единицу ниже. Применяя для его решения ту же подстановку, получим

$$v'=u(x),\ \ y^{(n-2)}=v(x), \tag{10}$$

где $v(x)=\int\limits_{x_0}^{x}\left(\int\limits_{x_0}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x+C_1x+C_2$. Таким образом, при каждом интегрировании порядок уравнения понижается на единицу, а в правой части добавляется одна произвольная постоянная. После n-кратного интегрирования получим общее решение уравнения (8), содержащее n произвольных постоянных.

Примеры. 1. Решить уравнение $y''-x^2=0$.

Р е ш е н и е. Запишем уравнение в виде $y''=x^2$. Интегрируя, получим $y'=\int\limits_0^x x^2\,\mathrm{d}x+C_1$, или $y'=\frac{x^3}{3}+C_1$, где C_1 — произвольная постоянная. Отсюда $y=\int\limits_0^x\left(\frac{x^3}{3}+C_1\right)\mathrm{d}x+C_2$, или $y=\frac{x^4}{12}+C_1x+C_2$, где C_2 — другая произвольная постоянная. Полученное решение содержит две произвольные постоянные C_1 и C_2 и является общим решением исходного уравнения (см. пример 1 п. 1^0).

2. Решить уравнение $y'''=x$.

Решение. Интегрируя, получим $y''=\frac{x^2}{2}+C_1$, $C_1\in\mathbf{R}$. Повторно интегрируя, имеем $y'=\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2$, $C_2\in\mathbf{R}$. Отсюда $y=\frac{x^4}{24}+\frac{C_1x^2}{2}+C_2x+C_3$, $C_3\in\mathbf{R}$. Полученное решение содержит три произвольные постоянные C_1, C_2, C_3 и является общим решением исходного уравнения (см. пример 2 п. 1°).

2. Уравнение вида

$$F(x,\ y',\ y'')=0, \tag{11}$$

не содержащее y в явной форме, подстановкой $y'=u$, $y''=u'$ сводится к двум уравнениям

$$F(x,\ u,\ u')=0,\quad y'=u, \tag{12}$$

каждое из которых является уравнением первого порядка, в то время как исходное уравнение имеет второй порядок.

Пример 3. Решить уравнение $x^3y''+x^2y'=1$.

Решение. Данное уравнение не содержит y в явной форме. С помощью подстановки $y'=u$, $y''=u'$ сведем его к двум дифференциальным уравнениям первого порядка:

$$x^3u'+x^2u=1,\quad y'=u. \tag{*}$$

Первое из них представляет собой линейное уравнение первого порядка $u'+\frac{u}{x}=\frac{1}{x^3}$ (см. п. 6° § 3.3). Область единственности этого уравнения есть $D=\{(x,\ u): x\neq 0\}$. Находим интегрирующий множитель $\mu(x)=\exp\int\frac{dx}{x}=\exp(\ln x)=x$. Общий интеграл имеет вид

$$\int\limits_1^x\left(u-\frac{1}{x^2}\right)dx+\int\limits_0^u 1\cdot du=C_1,$$

откуда $u=\frac{C_1x-1}{x^2}$. Подставляя это выражение во второе из уравнений (*), получим $y'=\frac{C_1}{x}-\frac{1}{x^2}$, откуда $y=C_1\ln x+\frac{1}{x}+C_2$.

3. Уравнение вида

$$F(y,\ y',\ y'')=0, \tag{13}$$

не содержащее x в явной форме, подстановкой $y'=u$, $y''=\frac{du}{dx}=\frac{du}{dx}\cdot\frac{dy}{dy}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{du}{dy}=y'\frac{du}{dy}=u\frac{du}{dy}$ сводится к двум уравнениям

$$F\left(y,\ u,\ u\cdot\frac{du}{dy}\right)=0,\quad y'=u. \tag{14}$$

Первое из уравнений (14) является дифференциальным уравнением первого порядка относительно u как неизвестной функции от y, второе — дифференциальным уравнением первого порядка относительно y как неизвестной функции от x.

Пример 4. Решить уравнение $yy''+(y')^2=0$.

Решение. Данное уравнение не содержит x в явной форме. С помощью подстановки $y'=u$, $y''=u\cdot\dfrac{du}{dy}$ сведем его к двум дифференциальным уравнениям первого порядка:

$$yu\frac{du}{dy}+u^2=0, \quad y'=u. \tag{*}$$

Первое из уравнений (*) преобразуем к виду

$$u^2\,dy+yu\,du=0.$$

Это — уравнение с разделяющимися переменными (см. п. 4⁰ § 3.3). Находим интегрирующий множитель $\mu(y,\ u)=1/(u^2y)$. Область единственности решений есть $D=\{(y,\ u): y\neq 0,\ u\neq 0\}$. Общий интеграл имеет вид

$$\int_1^y\frac{dy}{y}+\int_1^u\frac{du}{u}=C_1,$$

откуда $u=C_1/y$. Подставляя это выражение во второе из уравнений (*), имеем $y'=C_1/y$, или $C_1dx-y\,dy=0$. Получили уравнение с разделенными переменными (см. п. 4^0 § 3.3), общий интеграл которого есть

$$\int_0^x C_1\,dx-\int_0^y y\,dy=C_2,$$

откуда $y^2=C_1x+C_2$.

3^0. Упражнения

Решите уравнения.

1. $y''+y'\operatorname{tg}x=\sin 2x$.
2. $y''x\ln x=y'$.
3. $2yy''=(y')^2$.
4. $y''\operatorname{tg}x=y'+1$.
5. $t\cdot\dfrac{d^2s}{dt^2}+\dfrac{ds}{dt}+t=0$.
6. $y'''=\dfrac{6}{x^3}$, $y(1)=2$; $y'(1)=1$; $y''(1)=1$.
7. $y''=\dfrac{1}{1+x^2}$.
8. $y''=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\ln 2}{2}$; $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$.
9. $y''\operatorname{tg}y=2(y')^2$.
10. $2yy''=1+(y')^2$.

§ 3.6. Линейные дифференциальные уравнения. Понятие однородного и неоднородного уравнения. Однородное линейное уравнение, его общее решение. Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами

1°. Линейные дифференциальные уравнения. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$\alpha_0(x)y^{(n)}+\alpha_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+\alpha_{n-1}(x)y'+\alpha_n(x)y=r(x), \qquad (1)$$

где $\alpha_i(x)$ $(i=0, 1, \ldots, n)$ и $r(x)$ — известные функции, непрерывные при всех допустимых значениях x; y — искомая функция аргумента x; $y', \ldots, y^{(n)}$ — ее производные по x.

Заметим, что искомая функция и ее производные входят в уравнение (1) в первой степени, поэтому его и называют линейным.

Функция $r(x)$, входящая в линейное уравнение (1), называется *правой частью.*

Определение 1. Линейное дифференциальное уравнение (1) называется *однородным* (или *уравнением без правой части*), если $r(x)\equiv 0$. Если же $r(x)\not\equiv 0$, то уравнение (1) называется *неоднородным* (или *уравнением с правой частью*).

Запишем уравнение (1) в другой форме. Разделим все члены этого уравнения на $\alpha_0(x)$ и обозначим новые коэффициенты через $a_i(x)=\dfrac{\alpha_i(x)}{\alpha_0(x)}$ $(i=1,\ldots,n)$, а новую правую часть — через $f(x)=\dfrac{r(x)}{\alpha_0(x)}$. Тогда уравнение (1) запишется в виде

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x), \qquad (2)$$

а соответствующее ему однородное уравнение — в виде

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0. \qquad (3)$$

2°. Основные свойства линейных однородных уравнений второго порядка. Рассмотрим уравнение

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0, \qquad (4)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — функции, непрерывные при всех допустимых значениях x. Уравнение (4) является линейным однородным уравнением вида (3), где $n=2$, $a_1(x)=p(x)$, $a_2(x)=q(x)$. Оно имеет очевидное решение $y(x)\equiv 0$ (нулевое решение), для которого $y'=0$, $y''=0$ и уравнение (4) обращается в тождество. Интерес представляет отыскание ненулевых решений уравнения (4).

Пусть $y_1=y_1(x)$, $y_2=y_2(x)$ — два решения уравнения (4), отличные от нулевого.

Определение 2. Два решения y_1 и y_2 уравнения (4) называются *линейно зависимыми*, если существуют постоянные α_1 и α_2, не обращающиеся одновременно в нуль и такие, что при любом значении x справедливо соотношение

$$\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)\equiv 0. \tag{5}$$

Если же таких чисел α_1 и α_2 не существует, т. е. тождество (5) справедливо только при $\alpha_1=\alpha_2=0$, то решения y_1 и y_2 называются *линейно независимыми*.

Примеры. 1. Пусть $y_1=e^{k_1x}$, $y_2=e^{k_2x}$ и $k_1\neq k_2$. Покажем, что y_1 и y_2 линейно независимы. Предположим противное, т. е. что y_1 и y_2 линейно зависимы. Тогда при любом значении x должно выполняться соотношение (5) и, значит, $\alpha_1 e^{k_1x}+\alpha_2 e^{k_2x}\equiv 0$, откуда $e^{(k_1-k_2)x}\equiv -\alpha_2/\alpha_1$, что невозможно, так как левая часть тождества — переменная величина, зависящая от x, а правая часть — величина постоянная. Из полученного противоречия следует, что y_1 и y_2 линейно независимы.

2. Пусть, как и в предыдущем примере, $y_1=e^{k_1x}$, $y_2=e^{k_2x}$ и $k_1=k_2=k$. Покажем, что y_1 и y_2 линейно зависимы, т. е. существуют числа α_1 и α_2 такие, что при любом x справедливо соотношение $\alpha_1e^{kx}+\alpha_2e^{kx}\equiv 0$, откуда $\alpha_1+\alpha_2\equiv 0$ (поскольку $e^{kx}\neq 0$), или $\alpha_1\equiv -\alpha_2$. Таким образом, достаточно положить $\alpha_1=-\alpha_2$.

О линейной зависимости решений можно судить по определителю

$$W(y_1,\ y_2)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}, \tag{6}$$

составленному из функций y_1, y_2 и их производных, который называют *определителем Вронского* (или *вронскианом*). Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Если решения y_1 и y_2 уравнения* (4) *линейно зависимы на отрезке $[a,\ b]$, то $W(y_1,\ y_2)=0$ для любого x из $[a,\ b]$.*

Доказательство. Так как y_1 и y_2 линейно зависимы, то справедливо тождество (5), т. е. $y_1(x)\equiv -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}y_2(x)$. Составим вронскиан

$$W(y_1,\ y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}y_2 & y_2 \\ -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}y_2' & y_2'\end{vmatrix}=-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\begin{vmatrix} y_2 & y_2 \\ y_2' & y_2'\end{vmatrix},$$

откуда $W(y_1,\ y_2)\equiv 0$ как определитель с двумя равными столбцами.

Для определителя $W(y_1,\ y_2)$ имеет место *формула Лиувилля*

$$W(y_1,\ y_2)\equiv W_0\exp\left[-\int_{x_0}^{x}p(x)\,dx\right], \tag{7}$$

где W_0 — постоянная, равная значению $W(y_1,\ y_2)$ при $x=x_0$, а $x_0\in[a,\ b]$ — фиксированное значение аргумента.

Доказательство справедливости формулы Лиувилля приведено в п. 1° § 3.7*. Из формулы (7) видно, что либо $W(y_1, y_2)\equiv 0$ (если $W_0=0$), либо $W(y_1, y_2)$ не обращается в нуль ни при одном значении $x\in[a, b]$, так как показательная функция всегда положительна.

Теорема 2 (обратная). *Если решения y_1 и y_2 уравнения* (4) *линейно независимы на отрезке $[a, b]$, то $W(y_1, y_2)$ не обращается в нуль ни в одной точке из $[a, b]$.*

Доказательство теоремы 2 приведено в п. 2° § 3.7*.

Комментарии к теоремам 1 и 2. Теоремы 1 и 2 означают, что *равенство нулю вронскиана $W(y_1, y_2)$ является необходимым и достаточным условием линейной зависимости решений y_1 и y_2.*

Примеры. 3. Пусть $y_1=e^{k_1x}$, $y_2=e^{k_2x}$, где $k_1\neq k_2$ (см. пример 1). Составим вронскиан и вычислим его:

$$W(y_1, y_2)=\begin{vmatrix} e^{k_1x} & e^{k_2x} \\ k_1e^{k_1x} & k_2e^{k_2x} \end{vmatrix}=(k_2-k_1)e^{(k_1+k_2)x}\neq 0 \quad \forall x\in\mathbf{R},$$

так как $k_2\neq k_1$. Следовательно, решения $y_1=e^{k_1x}$ и $y_2=e^{k_2x}$ линейно независимы.

4. Пусть $y_1=e^{k_1x}$, $y_2=e^{k_2x}$, где $k_1=k_2=k$ (см. пример 2). Составив вронскиан, получим

$$W(y_1, y_2)=\begin{vmatrix} e^{kx} & e^{kx} \\ ke^{kx} & ke^{kx} \end{vmatrix}\equiv 0,$$

как определитель с одинаковыми столбцами. Следовательно, решения $y_1=e^{kx}$ и $y_2=e^{kx}$ линейно зависимы.

5. Показать, что решения $y_1=e^{kx}$ и $y_2=xe^{kx}$ линейно независимы.

Решение. Находим

$$W(y_1, y_2)=\begin{vmatrix} e^{kx} & xe^{kx} \\ ke^{kx} & (1+kx)e^{kx} \end{vmatrix}=e^{2kx}\neq 0 \quad \forall x\in\mathbf{R},$$

т. е. y_1 и y_2 линейно независимы.

6. Являются ли решения $y_1=\sin bx$ и $y_2=\cos bx$, где $b\neq 0$, линейно зависимыми?

Решение. Вычислим

$$W(y_1, y_2)=\begin{vmatrix} \sin bx & \cos bx \\ b\cos bx & -b\sin bx \end{vmatrix}=-b(\sin^2 bx+\cos^2 bx)=-b\neq 0$$

для всех x. Следовательно, y_1 и y_2 линейно независимы.

7. Являются ли решения $y_1=e^{\alpha x}\sin\beta x$ и $y_2=e^{\alpha x}\cos\beta x$, где $\beta\neq 0$, линейно зависимыми?

Решение. Находим

$$W(y_1, y_2)=\begin{vmatrix} e^{\alpha x}\sin\beta x & e^{\alpha x}\cos\beta x \\ e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x+\beta\cos\beta x) & e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x-\beta\sin\beta x) \end{vmatrix}=$$

$$=-\beta e^{2\alpha x}(\sin^2\beta x+\cos^2\beta x)=-\beta e^{2\alpha x}\neq 0$$

для всех x. Значит, решения y_1 и y_2 линейно независимы.

Докажем теорему, позволяющую находить общее решение уравнения (4), если известны два его линейно независимых решения.

Теорема 3. *Если y_1 и y_2 — два линейно независимых решения уравнения* (4), *то функция*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{8}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, является общим решением уравнения (4), *т. е. дает все решения этого уравнения.*

Доказательство. Сначала докажем, что функция (8) действительно является решением уравнения (4) при любых значениях C_1 и C_2, а затем докажем, что нет таких решений уравнения (4), которые нельзя было бы задать в виде формулы (8).

Подставляя функцию (8) в левую часть уравнения (4) и вынося за скобку соответственно C_1 и C_2, получим

$$y'' + p(x) y' + q(x) y =$$

$$= C_1 [y_1'' + p(x) y_1' + q(x) y_1] + C_2 [y_2'' + p(x) y_2' + q(x) y_2] = 0.$$

Так как y_1 и y_2 — решения уравнения (4), то выражения в квадратных скобках равны нулю. Следовательно, функция (8) обращает уравнение (4) в тождество при любых значениях C_1 и C_2, т. е. она является решением уравнения (4).

Для доказательства второго утверждения достаточно показать, что при любых начальных условиях $x = x_0$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ (а они, как это вытекает из теоремы существования и единственности решений, определяют решение уравнения (4) однозначно) в формуле (8) можно подобрать значения постоянных C_1 и C_2 так, что полученное с ее помощью решение $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ уравнения (4) будет удовлетворять заданным начальным условиям, т. е. все решения уравнения (4) могут быть записаны в виде (8). Подставляя начальные условия в соотношение (8), имеем

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0), \\ y_0' = C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0). \end{cases} \tag{9}$$

Определитель этой системы $\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$, так как является определителем Вронского $W(y_1, y_2)$ при $x = x_0$, а решения y_1 и y_2 линейно независимы. Следовательно, система (9) имеет единственное решение. Найдя из этой системы C_1 и C_2, по формуле (8) получим решение y, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Пример 8. Найти общее решение уравнения $y'' - \frac{6}{x} y' + \frac{12}{x^2} y = 0$, если известны его частные решения $y_1 = x^3$ и $y_2 = x^4$.

Решение. Данное уравнение является уравнением вида (4), где $p(x) = -\frac{6}{x}$, $q(x) = \frac{12}{x^2}$. Область единственности есть $D =$

$=\{(x, y): x\neq 0\}$. Общее решение уравнения в D задается формулой (8), если y_1 и y_2 — линейно независимые решения. Проверим, так ли это. Находим вронскиан

$$W(y_1, y_2)=\begin{vmatrix} x^3 & x^4 \\ 3x^2 & 4x^3 \end{vmatrix}=4x^6-3x^6=x^6\neq 0 \quad \forall x\neq 0.$$

Следовательно, решения y_1 и y_2 линейно независимы и общее решение исходного уравнения имеет вид $y=C_1x^3+C_2x^4$.

Как видно из этого примера, для нахождения общего решения уравнения (4) необходимо знать два линейно независимых решения y_1 и y_2 уравнения (4). Иногда удается найти или угадать только одно частное решение y_1. В этом случае можно отыскать второе частное решение y_2, воспользовавшись формулой Лиувилля (7). Рассмотрим производную частного двух решений

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)=\frac{y_2'y_1-y_1'y_2}{y_1^2}=\frac{W(y_1, y_2)}{y_1^2}=\frac{W_0}{y_1^2}\exp\left[-\int_{x_0}^{x}p(x)\,dx\right]; \quad (10)$$

где x_0 принадлежит области единственности уравнения (4). Интегрируя соотношение (10) и умножая обе части равенства на y_1, получим

$$y_2=y_1W_0\int\frac{1}{y_1^2}\exp\left[-\int_{x_0}^{x}p(x)\,dx\right]dx. \quad (11)$$

Правая часть формулы (11) содержит лишь известное решение y_1; следовательно, ее можно использовать для нахождения решения y_2, полагая $W_0=1$. При этом полученное по формуле (11) решение y_2 и решение y_1 линейно независимы.

Примеры. 9. Решить уравнение $y''+\dfrac{2}{x}y'+y=0$, зная его частное решение $y_1=\dfrac{\sin x}{x}$.

Решение. Это — уравнение вида (4), оно имеет область единственности $D=\{(x, y): x\neq 0\}$. Здесь $p(x)=\dfrac{2}{x}$, $q(x)=1$. Используя формулу (11), где $x_0=1\in D$, найдем второе частное решение:

$$y_2=\frac{\sin x}{x}\int\frac{x^2}{\sin^2 x}\exp\left[-\int_1^x\frac{2}{x}\,dx\right]dx=\frac{\sin x}{x}\int\frac{x^2}{\sin^2 x}e^{-2\ln x}\,dx=$$

$$=\frac{\sin x}{x}\int\frac{x^2}{\sin^2 x}e^{\ln\frac{1}{x^2}}\,dx=\frac{\sin x}{x}\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\frac{\sin x}{x}\cdot\operatorname{ctg} x=-\frac{\cos x}{x}.$$

Здесь постоянную интегрирования можно взять равной нулю, так как ищется частное решение. Решения y_1 и y_2 линейно независимы, поэтому общее решение исходного уравнения имеет вид $y=C_1\frac{\sin x}{x}+C_2\frac{\cos x}{x}$ (оно записано в виде суммы, а не разности, поскольку знак минус в решении y_2 можно отнести к произвольной постоянной C_2).

10. Решить уравнение $y''-\frac{2x}{x^2+1}y'+\frac{2y}{x^2+1}=0$.

Решение. Очевидно, функция $y_1=x$ является частным решением данного уравнения. Область единственности — вся плоскость $\mathbf{R}^2$. Пусть $x_0=0$; тогда

$$y_2=x\int\frac{1}{x^2}\exp\left[-\int_0^x\left(-\frac{2x}{x^2+1}\right)dx\right]dx=x\int\frac{1}{x^2}e^{\ln(x^2+1)}\,dx=$$

$$=x\int\frac{x^2+1}{x^2}\,dx=x\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^2-1.$$

Общее решение исходного уравнения имеет вид $y=C_1x+C_2(x^2-1)$.

3⁰. Линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Как видно из п. 2⁰, общее решение уравнения (4) удается найти не во всех случаях. Однако в частном случае, когда уравнение (4) имеет вид

$$y''+py'+qy=0, \tag{12}$$

где p и q — постоянные, его общее решение можно найти всегда. Уравнение (12) называется *линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами*. Будем искать его решение в виде $y=e^{kx}$, где k — некоторое пока неизвестное число (действительное или мнимое). Тогда $y'=ke^{kx}$, $y''=k^2e^{kx}$. Подставив эти выражения в уравнение (12) (подробнее см. п. 3⁰ § 3.7*) и разделив обе его части на общий множитель e^{kx}, отличный от нуля для всех x, получим

$$k^2+pk+q=0. \tag{13}$$

Уравнение (13) называется *характеристическим уравнением* для уравнения (12). Его корни находятся по формуле

$$k_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}. \tag{14}$$

В зависимости от характера корней уравнения (13) получаются различные общие решения уравнения (12). Рассмотрим возможные случаи.

1. *Корни действительные и различные:* $k_1\neq k_2$. В этом случае частными решениями уравнения (12) являются $y_1=e^{k_1x}$, $y_2=e^{k_2x}$. Как было показано в примере 1, п. 2⁰, эти решения линейно независимы. Следовательно, общее решение уравнения (12) имеет вид

$$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}. \tag{15}$$

2. *Корни действительные и равные:* $k_1=k_2=k$. В этом случае одно частное решение имеет вид $y_1=e^{kx}$. Если взять $\tilde{y}_2=e^{kx}$, то решения y_1 и $\tilde{y}_2$ окажутся линейно зависимыми, что было показано в примере 2 п. 2^0. Поэтому второе частное решение находим по формуле (11) и получаем $y_2=xe^{kx}$ (подробнее см. п. 3^0 § 3.7*). Как было показано в примере 5 п. 2^0, решения y_1 и y_2 линейно независимы. Следовательно, общее решение уравнения (12) имеет вид

$$y=e^{kx}(C_1+C_2x). \tag{16}$$

3. *Корни комплексные:* $k_1=\alpha+i\beta$, $k_2=\alpha-i\beta$, где $\alpha=-\frac{p}{2}$ — действительная, а $\beta=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$ — мнимая часть комплексного числа. Легко проверить, что в этом случае линейно независимыми решениями уравнения (12) являются частные решения $y_1=e^{\alpha x}\sin\beta x$ и $y_2=e^{\alpha x}\cos\beta x$ (см. пример 7 п. 2^0). Следовательно (подробнее см. п. 3^0 § 3.7*), общее решение уравнения (12) имеет вид

$$y=e^{\alpha x}(C_1\sin\beta x+C_2\cos\beta x). \tag{17}$$

Таким образом, решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (12) сводится к нахождению корней характеристического уравнения (13), которое легко составить непосредственно по уравнению (12), если в нем заменить производные соответствующими степенями показателя k.

Примеры. 1. Решить уравнение $y''-4y'+3y=0$.

Решение. Это — линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Соответствующее ему характеристическое уравнение $k^2-4k+3=0$ имеет действительные различные корни $k_1=1$, $k_2=3$. В силу формулы (15) его общее решение записывается в виде $y=C_1e^x+C_2e^{3x}$.

2. Решить уравнение $y''-4y'+4y=0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2-4k+4=0$; его корни $k_1=k_2=k=2$ — действительные и равные. По формуле (16) находим общее решение исходного уравнения $y=e^{2x}(C_1+C_2x)$.

3. Решить уравнение $y''-4y'+13y=0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^2-4k+13=0$. По формуле (14) находим его корни: $k_{1,2}=2\pm\sqrt{-9}=2\pm3i$, т. е. $\alpha=2$, $\beta=3$. Используя формулу (17), получим общее решение исходного уравнения $y=e^{2x}(C_1\sin 3x+C_2\cos 3x)$.

4. Решить задачу Коши для уравнения $y''+4y=0$ с начальными условиями $y(0)=5$, $y'(0)=4$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^2+4=0$. Оно имеет чисто мнимые корни $k_{1,2}=\pm 2i$, откуда $\alpha=0$, $\beta=2$. По формуле (17) находим общее решение $y=C_1\sin 2x+C_2\cos 2x$. Для отыскания частного решения, удовлетворяющего заданным начальным условиям, найдем $y'=2C_1\cos 2x-2C_2\sin 2x$. Подставляя в последнее соотношение и в общее решение начальные условия, получим систему уравнений

$$\begin{cases}5=C_1\sin 0+C_2\cos 0,\\ 4=2C_1\cos 0-2C_2\sin 0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_2=5,\\ C_1=2.\end{cases}$$

Соответствующее частное решение имеет вид $y=2\sin 2x+5\cos 2x$.

4^0. Линейные однородные уравнения высших порядков. В пп. 2^0 и 3^0 были рассмотрены однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка вида (4). Линейные однородные уравнения высших порядков обладают аналогичными свойствами. Сформулируем их, не останавливаясь на доказательствах.

Рассмотрим *линейное однородное уравнение n-го порядка* вида (3):

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0.$$

Определение 3. Частные решения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ уравнения (3) называются *линейно независимыми*, если между ними не существует тождественного относительно x соотношения

$$\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+\ldots+\alpha_ny_n=0,$$

где постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ одновременно не обращаются в нуль.

Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — линейно независимые частные решения уравнения (3), то его общее решение задается формулой

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n, \tag{18}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные.

Если коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ уравнения (3) постоянны, то его частные решения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ находятся с помощью *характеристического уравнения*

$$k^n+a_1k^{n-1}+\ldots+a_{n-1}k+a_n=0. \tag{19}$$

При этом каждому действительному корню k уравнения (19), имеющему кратность m, соответствуют m частных решений вида e^{kx}, $xe^{kx}, \ldots, x^{m-1}e^{kx}$ уравнения (3), а каждой паре комплексных корней $k=\alpha\pm i\beta$ кратности m соответствуют m пар частных решений вида $e^{\alpha x}\sin\beta x$, $e^{\alpha x}\cos\beta x$; $xe^{\alpha x}\sin\beta x$, $xe^{\alpha x}\cos\beta x$; ...; $x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$, $x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$.

Примеры. 1. Решить уравнение $y'''-5y''+8y'-4y=0$.

Решение. Это — линейное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами. Для нахождения его общего решения по формуле (18) необходимо знать три частных решения. Составим характеристическое уравнение $k^3-5k^2+8k-4=0$, или $(k-1)(k^2-4k+4)=0$. Отсюда $k-1=0$, т. е. $k_1=1$, и $k^2-4k+4=0$, т. е. $k_2=k_3=2$. Таким образом, имеем однократный корень $k_1=1$, которому соответствует частное решение $y_1=e^x$, и двукратный корень $k_{2,3}=2$, которому соответствуют частные решения $y_2=e^{2x}$, $y_3=xe^{2x}$. Общим решением исходного уравнения является $y=C_1e^x+e^{2x}(C_2+C_3x)$.

2. Решить уравнение $y'''-8y=0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^3-8=0$, или $(k-2)(k^2+2k+4)=0$. Отсюда $k_1=2$, $k_{2,3}=-1\pm\sqrt{3}i$. Однократному действительному корню соответствует решение $y_1=e^{2x}$, а однократной паре комплексных корней — пара решений $y_2=$ $=e^{-x}\sin\sqrt{3}x$, $y_2=e^{-x}\cos\sqrt{3}x$. Общее решение исходного уравнения имеет вид $y=C_1e^{2x}+e^{-x}(C_2\sin\sqrt{3}x+C_3\cos\sqrt{3}x)$.

3. Решить уравнение $y'''+3ay''+3a^2y'+a^3y=0$.

Решение. Характеристическое уравнение можно записать в виде $(k+a)^3=0$, откуда получим трехкратный действительный корень $k_{1,2,3}=-a$, которому соответствуют частные решения $y_1=$ $=e^{-ax}$, $y_2=xe^{-ax}$, $y_3=x^2e^{-ax}$. Общее решение есть $y=e^{-ax}(C_1+C_2x+$ $+C_3x^2)$.

5⁰. Упражнения

Решите уравнение, зная одно его частное решение y_1:

1. $y''-y'+\dfrac{y}{x}=0$; $y_1=x$.

2. $y''-y'\operatorname{tg}x+2y=0$; $y_1=\sin x$.

Решите уравнения:

3. $y''+3y'+2y=0$. 4. $y''+2ay'+a^2y=0$ $(a>0)$.

5. $y''+2y'+5y=0$. 6. $\dfrac{d^2x}{dt^2}-2\dfrac{dx}{dt}-3x=0$.

7. $\dfrac{d^2s}{dt^2}+2\dfrac{ds}{dt}+2s=0$, $s(0)=1$, $s'(0)=1$.

8. $y'''-3y''+4y=0$. 9. $y^{IV}+8y''+16y=0$.

§ 3.7*. Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка (дополнения)

1⁰. **Вывод формулы Лиувилля.** Докажем справедливость формулы (7) § 3.6, которая имеет вид

$$W(y_1,\ y_2)=W_0\exp\left[-\int_{x_0}^{x}p(x)\,dx\right], \tag{1}$$

где y_1 и y_2 — решения уравнения

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0, \tag{2}$$

а $W(y_1,\ y_2)=y_1y_2'-y_2y_1'$ — определитель Вронского. Так как y_1, y_2 — решения уравнения (2), то

$$y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1=0,\quad y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_2=0.$$

Умножая первое уравнение на $-y_2$, а второе на y_1 и складывая почленно, получим

$$y_1 y_2'' - y_2 y_1'' + p(x)\left(y_1 y_2' - y_2 y_1'\right) = 0. \tag{3}$$

В равенстве (3) выражение в скобках есть определитель Вронского $W(y_1, y_2)$ Найдем производную

$$\frac{dW(y_1, y_2)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(y_1 y_2' - y_2 y_1'\right) = y_1 y_2'' - y_2 y_1''.$$

Используя последнее равенство, запишем соотношение (3) в виде

$$dW + p(x) W\, dx = 0. \tag{4}$$

Это — уравнение с разделяющимися переменными (см. п. 4° § 3.3); его интегрирующий множитель есть $\mu(x, W) = 1/W$. Следовательно, $\frac{1}{W} dW + p(x)\, dx = 0$ и общий интеграл имеет вид $\int\limits_{W_0}^{W} \frac{dW}{W} + \int\limits_{x_0}^{x} p(x)\, dx = 0$, где (x_0, W_0) — точка из области единственности решений уравнения (4). Интегрируя последнее соотношение, получим формулу Лиувилля (1).

Справедливость формулы (1) можно проверить и простой подстановкой ее в уравнение (4). Очевидно, что

$$W' = \frac{dW(y_1, y_2)}{dx} = W_0 \exp\left[-\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\, dx\right]\left[-\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\, dx\right]' = W(-p(x)),$$

откуда $W(-p(x))\ dx + p(x) W dx = 0$.

2°. Доказательство теоремы 2 § 3.6. Докажем, что если решения y_1 и y_2 уравнения (2) линейно независимы на отрезке $[a, b]$, то $W(y_1, y_2)$ не обращается в нуль ни в одной точке из $[a, b]$.

Допустим противное, т. е. что решения y_1 и y_2 уравнения (2) линейно независимы на $[a, b]$ и $W(y_1, y_2) = 0$ в некоторой точке отрезка $[a, b]$. Тогда в силу формулы Лиувилля (1) определитель Вронского $W(y_1, y_2)$ обращается в нуль во всех точках отрезка $[a, b]$, т. е. $y_1 y_2' - y_2 y_1' \equiv 0$

Пусть $y_1 \neq 0\ \forall x \in [a, b]$; тогда

$$\frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2} \equiv 0, \text{ или } \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' \equiv 0,$$

откуда $y_2/y_1 \equiv \alpha$, где α — некоторая постоянная. Следовательно, $\alpha y_1 - y_2 \equiv 0$, т. е. решения y_1 и y_2 линейно зависимы, что противоречит предположению.

Пусть $y_1 = 0$ в некоторых точках из $[a, b]$; обозначим их $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Возьмем интервал $]a, x_1[$, в котором $y_1 \neq 0$. Значит,

$$y_2/y_1 = \alpha, \text{ или } \alpha y_1 - y_2 = 0 \quad \forall x \in]a, x_1[. \tag{5}$$

Рассмотрим функцию $y = \alpha y_1 - y_2$. Поскольку y_1 и y_2 — решения уравнения (2), y — также решение уравнения (2), причем вследствие (5) $y \equiv 0$ на интервале $]a, x_1[$. В силу единственности решений получаем, что $y \equiv 0$ на всем отрезке $[a, b]$ [так как $y \equiv 0$ — решение уравнения (2)]. Поэтому соотношение (5) выполнено всюду на $[a, b]$, что означает линейную зависимость решений y_1 и y_2 Таким образом, и в этом случае получили противоречие

Не рассмотрен лишь случай $y_1 \equiv 0$ на $[a, b]$, однако он не может иметь места (предполагается, что решения y_1 и y_2 отличны от нулевого).

Следовательно, предположение о том, что $W(y_1, y_2) = 0$ хотя бы в одной точке отрезка $[a, b]$, неизбежно приводит к противоречию. Итак, если y_1 и y_2 — линейно независимые на $[a, b]$ решения, то $W(y_1, y_2)$ не обращается в нуль ни в одной точке из $[a, b]$.

3°. Нахождение общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (дополнения). Пусть дано уравнение

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{6}$$

Будем искать решение уравнения (6) в виде $y = e^{kx}$. Если k — действительное число, то имеют место соотношения

$$y' = ke^{kx}, \quad y'' = k^2 e^{kx}, \tag{7}$$

и, следовательно, справедливы все дальнейшие рассуждения п. 3° § 3.6. Если же $k = \alpha + i\beta$ — комплексное число, то справедливость соотношений (7) требует специального доказательства. Проведем его.

Из определения показательной функции при комплексном показателе имеем

$$y = e^{kx} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x). \tag{8}$$

Напомним правило дифференцирования комплексной функции $f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$ действительного аргумента (см. том I, § 5.4): $f'(x) = \varphi'(x) + i\psi'(x)$ (всюду $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$). Продифференцировав соотношение (8) по x, находим

$$y' = (e^{\alpha x} \cos \beta x)' + i\,(e^{\alpha x} \sin \beta x)' = e^{\alpha x}(\alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x) +$$

$$+ i\, e^{\alpha x}(\alpha \sin \beta x + \beta \cos \beta x) = \alpha e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) +$$

$$+ e^{\alpha x} \beta\,(-\sin \beta x + i \cos \beta x).$$

Умножим и разделим последний член этого соотношения на i. Учитывая, что $i^2 = -1$, получим

$$y' = \alpha e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) + i\beta\, e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) =$$

$$= (\alpha + i\beta)\, e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) = (\alpha + i\beta)\, e^{(\alpha + i\beta)x} = k\, e^{kx},$$

поскольку $k = \alpha + i\beta$. Таким образом, первое из соотношений (7) доказано. Аналогично доказывается и второе.

Покажем теперь, как получить второе частное решение уравнения (6) в случае равных действительных корней характеристического уравнения: $k_1 = k_2 = k = -p/2$. Поскольку $y_1 = e^{kx} = e^{-(p/2)x}$, по формуле (11) § 3.6 находим

$$y_2 = e^{-(p/2)x} \int e^{px} \exp\left[-\int_0^x p\,dx\right] dx = e^{-(p/2)x} \int e^{px} e^{-px}\,dx =$$

$$= xe^{-(p/2)x} = xe^{kx}.$$

Таким образом, общее решение уравнения (6) имеет вид $y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$. Вынося в последнем выражении общий множитель e^{kx} за скобку, получим формулу (16) § 3.6, что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь случай комплексных сопряженных корней: $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. Для доказательства справедливости формулы (17) § 3.6 положим частные решения уравнения (6) равными соответственно $y_1 = e^{k_1 x} = e^{(\alpha + i\beta)x}$ и $y_2 = e^{k_2 x} =$

$=e^{(\alpha-i\beta)x}$ (сравните со случаем действительных различных корней). Поскольку эти решения линейно независимы ($k_1\neq k_2$; см. пример 3 п. 2° § 3.6), общее решение уравнения (6) есть

$$y=\widetilde{C}_1 e^{(\alpha+i\beta)x}+\widetilde{C}_2 e^{(\alpha-i\beta)x}. \tag{9}$$

Используя формулу (8), запишем соотношение (9) в виде

$$y=e^{\alpha x}\left[\widetilde{C}_1\cos\beta x+\widetilde{C}_1 i\sin\beta x+\widetilde{C}_2\cos\beta x-\widetilde{C}_2 i\sin\beta x\right]=$$

$$=e^{\alpha x}\left[i\left(\widetilde{C}_1-\widetilde{C}_2\right)\sin\beta x+\left(\widetilde{C}_1+\widetilde{C}_2\right)\cos\beta x\right].$$

Введем в последнем выражении обозначения $C_1=i(\widetilde{C}_1-\widetilde{C}_2)$, $C_2=\widetilde{C}_1+\widetilde{C}_2$; тогда получим

$$y=C_1 e^{\alpha x}\sin\beta x+C_2 e^{\alpha x}\cos\beta x. \tag{10}$$

Вынося в формуле (10) за скобку общий множитель $e^{\alpha x}$, получим формулу (17) § 3.6.

Заметим, что вследствие теоремы 3 § 3.6 в выражении (10) можно считать, что $y_1=e^{\alpha x}\sin\beta x$ и $y_2=e^{\alpha x}\cos\beta x$ — частные решения уравнения (6). Это легко проверить простой подстановкой y_1 и y_2 в уравнение (6), учитывая, что $\alpha=-\frac{p}{2}$ и $\beta=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$. Линейную независимость решений y_1 и y_2 можно доказать с помощью определителя Вронского (см. пример 7 п. 2° § 3.6). Следовательно, общее решение уравнения (6) имеет вид (10), откуда вытекает формула (17) § 3.6

§ 3.8. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Уравнения с правой частью специального вида

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x), \tag{1}$$

где $a_1(x)$, ..., $a_{n-1}(x)$, $a_n(x)$, $f(x)\not\equiv 0$ — известные функции, непрерывные при всех допустимых значениях x.

1°. Основные свойства линейных неоднородных уравнений второго порядка. Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x), \tag{2}$$

где $p(x)$, $q(x)$, $f(x)\not\equiv 0$ — заданные непрерывные функции. Составим для данного уравнения (2) соответствующее ему однородное уравнение

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0. \tag{3}$$

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Общее решение Y неоднородного уравнения* (2) *равно сумме общего решения y соответствующего однородного урав-*

нения (3) *и какого-либо частного решения* y_* *неоднородного уравнения* (2), т. е.

$$Y = y + y_*. \tag{4}$$

Отметим, что в силу теоремы 3 § 3.6 здесь $y = C_1y_1 + C_2y_2$.

Доказательство. Покажем сначала, что функция (4) действительно является решением уравнения (2), а затем — что нет таких решений уравнения (2), которые нельзя было бы представить в виде формулы (4), т. е. что выражение (4) представляет собой общее решение уравнения (2).

Подставляя в левую часть уравнения (2) функцию Y и ее производные Y' и Y'', получим

$$[y'' + p(x)y' + q(x)y] + [y_*'' + p(x)y_*' + q(x)y_*] = f(x).$$

Выражение в первых скобках равно нулю, так как y — общее решение уравнения (3), а выражение во вторых скобках равно $f(x)$, так как y_* — частное решение уравнения (2). Поэтому функция $Y = y + y_*$ обращает уравнение (2) в тождество и является его решением.

Для доказательства второго утверждения достаточно показать, что при любых начальных условиях $x = x_0$, $Y(x_0) = Y_0$, $Y'(x_0) = Y_0'$ (а они, как это вытекает из теоремы существования и единственности решений, определяют решение уравнения (2) однозначно) в формуле (4) можно подобрать параметры C_1 и C_2 так, что решение $Y = C_1y_1 + C_2y_2 + y_*$ уравнения (2) будет удовлетворять заданным начальным условиям. Найдя производную Y' и подставив в полученное выражение и в формулу (4) начальные условия, имеем

$$\begin{cases} Y_0 = C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) + y_*(x_0), \\ Y_0' = C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) + y_*'(x_0). \end{cases}$$

Перепишем последнюю систему в виде

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) = Y_0 - y_*(x_0), \\ C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) = Y_0' - y_*'(x_0). \end{cases} \tag{5}$$

Так как определителем этой системы является вронскиан $W(y_1, y_2)$ при $x = x_0$:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix},$$

отличный от нуля в силу линейной независимости решений y_1 и y_2 (см. теорему 2 § 3.6), то из системы (5) можно однозначно найти параметры C_1 и C_2 так, что решение $Y = C_1y_1 + C_2y_2 + y_*$ уравнения (2) будет удовлетворять заданным начальным условиям.

Комментарий к теореме 1. Из теоремы 1 видно, что отыскание общего решения неоднородного уравнения (2) связано с нахождением общего решения однородного уравнения (3) и какого-либо частного решения уравнения (2). Первую часть задачи решить можно, воспользовавшись теоремами § 3.6. Для решения второй части задачи — нахождения частного решения уравнения (2) — применяют метод Лагранжа, который часто называют методом вариации (изменения) произвольных постоянных.

Теорема 2. *Пусть правая часть уравнения* (2) *представляет собой сумму двух слагаемых,* т. е.

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)+f_2(x), \tag{6}$$

а $u_1(x)$ *и* $u_2(x)$ — *решения уравнения* (2) *с правой частью, равной соответственно* $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$. *Тогда сумма* $u_1(x)+u_2(x)$ *является решением уравнения* (6).

Доказательство. Так как $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — решения уравнения (2) с правой частью $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ соответственно, то

$$u_1''+p(x)u_1'+q(x)u_1=f_1(x),\quad u_2''+p(x)u_2'+q(x)u_2=f_2(x).$$

Складывая последние соотношения, получим

$$(u_1+u_2)''+p(x)(u_1+u_2)'+q(x)(u_1+u_2)=f_1(x)+f_2(x).$$

Таким образом, $u_1(x)+u_2(x)$ — решение уравнения (6).

Комментарий к теореме 2. Заметим, что в теореме 2 речь идет о частных решениях уравнений (2) и (6).

2⁰. Метод Лагранжа (метод вариации произвольных постоянных). Будем искать частное решение y_* уравнения (2) в виде

$$y_*=C_1(x)y_1+C_2(x)\,y_2, \tag{7}$$

где y_1, y_2 — два линейно независимых решения уравнения (3), а $C_1(x)$ и $C_2(x)$ — искомые функции от x (ср. с формулой (8) § 3.6, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные). Поскольку y_* — решение уравнения (2), формула (7) должна обращать уравнение (2) в тождество. Однако для нахождения двух функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ одного этого условия недостаточно. Наложим еще одно условие на искомые функции: пусть

$$C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2=0. \tag{8}$$

Это можно сделать, так как годится любое частное решение y_*. Дважды дифференцируя равенство (7) и учитывая соотношение (8), имеем

$$\begin{gathered} y_*'=C_1'(x)y_1+C_1(x)y_1'+C_2'(x)y_2+C_2(x)y_2'=C_1(x)y_1'+C_2(x)y_2', \\ y_*''=C_1'(x)y_1'+C_1(x)y_1''+C_2'(x)y_2'+C_2(x)y_2''. \end{gathered} \tag{9}$$

Подставляя соотношения (9) в уравнение (2) и вынося за скобки $C_1(x)$ и $C_2(x)$ соответственно, получим

$$C_1(x)[y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1]+C_2(x)[y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_2]+$$
$$+C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'=f(x).$$

Выражения в скобках обращаются в нуль, поскольку y_1 и y_2 являются решениями однородного уравнения (3). Таким образом, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2=0, \\ C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'=f(x). \end{cases} \tag{10}$$

Из системы (10) можно однозначно найти $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$, так как ее определителем является вронскиан $W(y_1, y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$, отличный от нуля в силу линейной независимости решений y_1 и y_2 уравнения (3). При нахождении функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ по их производным примем постоянные интегрирования равными нулю. Далее, подставляя эти выражения в формулу (7), получим частное решение неоднородного уравнения (2). Общее решение этого уравнения находится по формуле (4).

Примеры. 1. Решить уравнение $y''+\frac{2}{x}y'+y=\frac{1}{x}$.

Р е ш е н и е. Данному линейному неоднородному уравнению второго порядка соответствует однородное уравнение $y''+\frac{2}{x}y'+$ $+y=0$, общее решение которого имеет вид $y=C_1\frac{\sin x}{x}+C_2\frac{\cos x}{x}$ $(x\neq 0)$ (см. пример 9 п. 2° § 3.6). Отсюда ясно, что $y_1=\frac{\sin x}{x}$, $y_2=\frac{\cos x}{x}$. Будем искать частное решение неоднородного уравнения методом вариации произвольных постоянных. Формула (7) в данном случае примет вид

$$y_*=C_1(x)\frac{\sin x}{x}+C_2(x)\frac{\cos x}{x}, \quad x\neq 0, \tag{*}$$

где $C_1(x)$, $C_2(x)$ — искомые функции. Для нахождения производных $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ составим систему вида (10):

$$\begin{cases} C_1'(x)\dfrac{\sin x}{x}+C_2'(x)\dfrac{\cos x}{x}=0, \\ C_1'(x)\left(\dfrac{\cos x}{x}-\dfrac{\sin x}{x^2}\right)+C_2'(x)\left(-\dfrac{\sin x}{x}-\dfrac{\cos x}{x^2}\right)=\dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

Решением этой системы являются функции $C_1'(x)=\cos x$ и $C_2'(x)=-\sin x$, откуда $C_1(x)=\int \cos x\,dx=\sin x+C_3$, $C_2(x)=$ $=\int(-\sin x)\,dx=\cos x+C_4$. Полагая $C_3=C_4=0$ и подставляя выражение для $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в формулу $(*)$, получим частное решение неоднородного уравнения $y_*=\frac{\sin^2 x}{x}+\frac{\cos^2 x}{x}=\frac{1}{x}$. Согласно формуле (4), общее решение исходного неоднородного уравнения записывается в виде $Y=C_1\frac{\sin x}{x}+C_2\frac{\cos x}{x}+\frac{1}{x}$.

2. Решить уравнение $y''-\frac{2x}{x^2+1}y'+\frac{2y}{x^2+1}=x^2+1$.

Решение. Соответствующее однородное уравнение имеет вид $y''-\frac{2x}{x^2+1}y'+\frac{2y}{x^2+1}=0$; его общее решение есть $y=C_1x+C_2(x^2-$ $-1)$ (см. пример 10 п. 2° § 3.6). Частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде $y_*=C_1(x)x+C_2(x)(x^2-1)$. Для определения $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ составим систему

$$\begin{cases} C_1'(x)\,x+C_2'(x)(x^2-1)=0, \\ C_1'(x)\cdot 1+C_2'(x)\cdot 2x=x^2+1. \end{cases}$$

Решением этой системы являются функции $C_1'(x)=1-x^2$ и $C_2'(x)=x$, откуда $C_1(x)=\int(1-x^2)\,dx=x-\frac{x^3}{3}+C_3$, $C_2(x)=$ $=\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+C_4$. Полагая $C_3=C_4=0$, получим $y_*=\left(x-\frac{x^3}{3}\right)x+$ $+\frac{x^2}{2}(x^2-1)=\frac{x^2}{6}(x^2+3)$. Общее решение неоднородного уравнения есть $Y=C_1x+C_2(x^2-1)+\frac{x^2}{6}(x^2+3)$.

3. Решить уравнение $y''-4y'+3y=e^{2x}$.

Решение. Соответствующее однородное уравнение имеет вид $y''-4y'+3y=0$. Это линейное уравнение с постоянными коэффициентами; его характеристическим уравнением является $k^2-4k+3=0$, откуда $k_1=1$, $k_2=3$. Общее решение однородного уравнения есть $y=C_1e^x+C_2e^{3x}$. Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $y_*=C_1(x)e^x+C_2(x)e^{3x}$. Производные $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ находим из системы

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x+C_2'(x)e^{3x}=0, \\ C_1'(x)e^x+C_2'(x)3e^{3x}=e^{2x}, \end{cases}$$

решением которой служат функции $C_1'(x)=-0{,}5e^x$, $C_2'(x)=0{,}5e^{-x}$. Отсюда $C_1(x)=-0{,}5e^x+C_3$, $C_2(x)=-0{,}5e^{-x}+C_4$, $C_3=C_4=0$. Частное решение исходного уравнения есть $y_* = -0{,}5e^x \cdot e^x + (-0{,}5)e^{-x} \times \times e^{3x} = -e^{2x}$. Общее решение неоднородного уравнения имеет вид $Y = C_1e^x + C_2e^{3x} - e^{2x}$.

4. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 3y = e^{2x} + 25\sin x$.

Решение. Так как правая часть уравнения представляет собой сумму двух функций e^{2x} и $25\sin x$, то для нахождения искомого частного решения воспользуемся теоремой 2. Рассмотрим два следующих неоднородных дифференциальных уравнения: $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$ и $y'' - 4y' + 3y = 25\sin x$. Общее решение первого из этих уравнений было найдено в примере 3. Полагая произвольные постоянные равными конкретным числовым значениям, например $C_1 = C_2 = 0$, получим частное решение $u_1(x) = -e^{2x}$.

Аналогично находим частное решение второго уравнения: общее решение соответствующего однородного уравнения есть $y = C_1e^x + C_2e^{3x}$; методом Лагранжа получим частное решение неоднородного уравнения $u_2(x) = 2{,}5\sin x + 5\cos x$. Таким образом, частное решение исходного уравнения имеет вид $y_*(x) = u_1(x) + u_2(x) = -e^{2x} + 2{,}5\sin x + 5\cos x$.

3°. Линейные неоднородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Рассмотрим частный случай уравнения (2):

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{11}$$

где p, q — постоянные, а $f(x) \not\equiv 0$ — заданная непрерывная при всех допустимых значениях x функция. Уравнение (11) называется *линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами*. Для его решения всегда можно использовать метод вариации произвольных постоянных (см. п. 2°). Однако когда правая часть уравнения (11) имеет специальный вид, частное решение можно подобрать проще — методом неопределенных коэффициентов. Уже при решении примеров 3 и 4 п. 2° можно было заметить, что частное решение имеет тот же вид, что и правая часть исследуемого уравнения, и отличается от нее коэффициентами. Приведем здесь без доказательства следующие правила для нахождения частного решения уравнения (11). Подробнее этот вопрос изложен в § 3.9*.

Правило I. *Если правая часть уравнения* (11) *есть* $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$, где $P_n(x)$ — *многочлен степени* $n \geqslant 0$ *и* α *является корнем кратности* r *характеристического уравнения* $k^2 + pk + q = 0$, *то частное решение* y_* *уравнения* (11) *имеет вид* $y_* = e^{\alpha x}x^rQ_n(x)$, *где* $Q_n(x)$ — *многочлен той же степени, что и* $P_n(x)$, *но с неопределенными коэффициентами.*

Правило II. *Если правая часть уравнения* (11) *есть* $f(x) = e^{\alpha x}(a\cos\beta x + b\sin\beta x)$ и $\alpha \pm i\beta$ — *корень кратности* r *характеристического уравнения, то частное решение* y_* *уравнения* (11) *имеет* *вид* $y_* = e^{\alpha x} x^r (A\cos\beta x + B\sin\beta x)$, *где* A *и* B — *неопределенные коэффициенты.*

Комментарий к правилам I и II. Так как для уравнения (11) характеристическое уравнение является квадратным, то для правила I r может принимать значения 0, 1 и 2, а для правила II — значения 0 и 1. При этом $r=0$ соответствует тому случаю, когда α или $\alpha \pm i\beta$ не являются корнями характеристического уравнения.

Примеры. 1. Решить уравнение $y'' - 2y' + y = e^{2x}$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 1 = 0$. Отсюда $k_1 = k_2 = 1$ и общее решение соответствующего однородного уравнения есть $y = (C_1 + C_2 x)e^x$. Найдем частное решение неоднородного уравнения, применяя правило I при $\alpha = 2$ и $P_0(x) = 1$ (многочлен нулевой степени). Так как $\alpha = 2$ не является корнем характеристического уравнения, то $r = 0$. Многочлен нулевой степени с неопределенными коэффициентами имеет вид $Q_0(x) = A$; значит, $y_* = Ae^{2x}$. Подставляя $y_* = Ae^{2x}$, $y_*' = 2Ae^{2x}$, $y_*'' = 4Ae^{2x}$ в исходное уравнение, получим $Ae^{2x} = e^{2x}$ или $A = 1$ (поскольку $e^{2x} \neq 0$). Следовательно, $y_* = e^{2x}$. Итак, $Y = (C_1 + C_2 x)e^x + e^{2x}$ — общее решение неоднородного уравнения.

2. Решить уравнение $y'' + 2y' + y = e^{-x}$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 2k + 1 = 0$ имеет корни $k_1 = k_2 = -1$. Общее решение однородного уравнения есть $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x}$. Здесь правая часть $f(x) = e^{-x}$, причем $\alpha = -1$ является двукратным корнем характеристического уравнения, т. е. $r = 2$, $Q_0(x) = A$. Следовательно, $y_* = Ax^2 e^{-x}$. Имеем $y_*' = Ax(2 - x)e^{-x}$, $y_*'' = Ae^{-x}(x^2 - 4x + 2)$. Подставляя y_*, y_*' и y_*'' в исходное уравнение и сокращая на общий ненулевой множитель e^{-x}, получим $A = 0{,}5$. Следовательно, $y_* = 0{,}5x^2 e^{-x}$ и общее решение исходного уравнения имеет вид $Y = (C_1 + C_2 x + 0{,}5x^2)e^{-x}$.

3. Решить уравнение $y'' + 3y' = 9x$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет корни $k_1 = 0$, $k_2 = -3$. Общее решение однородного уравнения таково: $y = C_1 + C_2 e^{-3x}$. Частное решение следует искать по правилу I, поскольку правая часть может быть записана в виде $f(x) = e^{0\cdot x} \cdot 9x$, т. е. $\alpha = 0$ и $P_1(x) = 9x$ — многочлен первой степени. Так как $\alpha = 0$ — однократный корень характеристического уравнения, то $r = 1$. Многочлен первой степени с неопределенными коэффициентами имеет вид $Q_1(x) = Ax + B$. Следовательно, частное решение ищем в виде $y_* = e^{0\cdot x} x(Ax + B) = Ax^2 + Bx$. Находим $y_*' = 2Ax + B$, $y_*'' = 2A$ и после подстановки в исходное уравнение получим $6Ax + (2A + 3B) = 9x$. Как известно, многочлены равны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты при одинаковых степенях x. Следовательно; $6A = 9$ и $2A + 3B = 0$. Решая эту систему, получаем $A = 1{,}5$, $B = -1$, т. е. $y_* = 1{,}5x^2 - x$. Общее решение исходного уравнения имеет вид $Y = C_1 + C_2 e^{-3x} + 1{,}5x^2 - x$

4. Решить задачу Коши для уравнения $y''-3y'+2y=x^2-1$ с начальными условиями $y(0)=2$, $y'(0)=4$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет корни $k_1=1$, $k_2=2$. Общее решение однородного уравнения таково: $y=C_1e^x+$ $+C_2e^{2x}$. Частное решение неоднородного уравнения ищем по правилу I при $\alpha=0$, $P_2(x)=x^2-1$, $r=0$, $Q_2(x)=Ax^2+Bx+C$. Имеем $y_*=$ $=Ax^2+Bx+C$; $y_*'=2Ax+B$; $y_*''=2A$. Подставляя y_* в исходное уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим $A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{3}{2}$, $C=\frac{5}{4}$. Следовательно, $y_*=\frac{1}{2}x^2+$ $+\frac{3}{2}x+\frac{5}{4}$ и общее решение исходного уравнения имеет вид

$$Y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{5}{4}. \qquad (*)$$

Дифференцируя равенство (*) по x, находим

$$Y'=C_1e^x+2C_2e^{2x}+x+\frac{3}{2}. \qquad (**)$$

Подставляя в соотношения (*) и (**) начальные условия, получим систему $2=C_1+C_2+\frac{5}{4}$, $4=C_1+2C_2+\frac{3}{2}$, решая которую, определим $C_1=-1$, $C_2=\frac{7}{4}$. Таким образом, частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, имеет вид $y=$ $=-e^x+\frac{7}{4}e^{2x}+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{5}{4}$.

5. Найти частное решение уравнения $y''-2y'=e^x(x^2+x-3)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=2$, $y'(0)=2$.

Решение. Корни характеристического уравнения таковы: $k_1=$ $=0$, $k_2=2$. Общее решение однородного уравнения имеет вид $y=$ $=C_1+C_2e^{2x}$. Частное решение неоднородного уравнения ищем по правилу I при $\alpha=1$, $P_2(x)=x^2+x-3$, $r=0$, $Q_2(x)=Ax^2+Bx+C$. Следовательно, $y_*=e^x(Ax^2+Bx+C)$, $y_*'=e^x[Ax^2+(B+2A)x+C+B]$, $y_*''=e^x[Ax^2+(B+4A)x+2A+2B+C]$. Подставляя эти выражения в исходное уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим $A=-1$, $B=-1$, $C=1$, откуда $y_*=e^x(-x^2-x+$ $+1)$ и общее решение исходного уравнения имеет вид

$$Y=C_1+C_2e^{2x}+e^x(-x^2-x+1). \qquad (*)$$

Дифференцируя равенство (*), находим

$$Y'=2C_2e^{2x}+e^x(-x^2-x+1)+e^x(-2x-1). \qquad (**)$$

Подставляя в соотношения (*) и (**) начальные условия, получим систему $2=C_1+C_2+1$, $2=2C_2$, откуда $C_1=0$, $C_2=1$. Следовательно, искомое частное решение есть $y=e^x(e^x-x^2-x+1)$.

6. Решить уравнение $y''-5y'+6y=13\sin 3x$.

Решение. Корнями характеристического уравнения являются $k_1=2$, $k_2=3$. Следовательно, $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$ — общее решение однородного уравнения. Частное решение неоднородного уравнения следует искать по правилу II, поскольку правая часть содержит тригонометрические функции и может быть записана в виде $f(x)=$ $=e^{0\cdot x}(0\cdot\cos 3x+13\sin 3x)$; здесь $\alpha=0$ и $\beta=3$. Так как $0\pm 3i$ не являются корнями характеристического уравнения, то $r=0$ и частное решение ищем в виде $y_*=e^{0\cdot x}\cdot x^0(A\cos 3x+B\sin 3x)=A\cos 3x+$ $+B\sin 3x$. Имеем $y_*'=-3A\sin 3x+3B\cos 3x$; $y_*''=-9A\cos 3x-$ $-9B\sin 3x$. Подставляя y_*, y_*', y_*'' в исходное уравнение и приводя подобные члены, получим

$$(-3A-15B)\cos 3x+(15A-3B)\sin 3x=13\sin 3x.$$

Последнее равенство справедливо, если равны коэффициенты при одноименных тригонометрических функциях, т. е. $15A-3B=13$, $-3A-15B=0$. Из этой системы уравнений находим $A=5/6$, $B=$ $=-1/6$. Тогда $y_*=\frac{5}{6}\cos 3x-\frac{1}{6}\sin 3x$. Общее решение исходного уравнения имеет вид $Y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\frac{5}{6}\cos 3x-\frac{1}{6}\sin 3x$.

7. Решить уравнение $y''-3y'+2y=2e^x\cos\frac{x}{2}$.

Решение. Имеем $k^2-3k+2=0$, т. е. $k_1=1$, $k_2=2$; следовательно, $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$. Частное решение следует искать по правилу II, поскольку правая часть представима в виде $f(x)=e^x\left(2\cos\frac{x}{2}+\right.$ $\left.+0\cdot\sin\frac{x}{2}\right)$, т. е. $\alpha=1$, $\beta=\frac{1}{2}$. Так как $1\pm\frac{1}{2}i$ не являются корнями характеристического уравнения, то $r=0$ и $y_*=e^x\left(A\cos\frac{x}{2}+\right.$ $\left.+B\sin\frac{x}{2}\right)$. Найдем y_*' и y_*'' и подставим их в исходное уравнение; тогда получим

$$e^x\left[-\left(\frac{A}{4}+\frac{B}{2}\right)\cos\frac{x}{2}+\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{4}\right)\sin\frac{x}{2}\right]=2e^x\cos\frac{x}{2}.$$

Сокращая на ненулевой множитель e^x и приравнивая отдельно коэффициенты при косинусах и синусах, получим систему $\frac{1}{4}A+$ $+\frac{1}{2}B=-2$, $\frac{1}{2}A-\frac{1}{4}B=0$, откуда $A=-\frac{8}{5}$ и $B=-\frac{16}{5}$. Следовательно, $y_*=e^x\left(-\frac{8}{5}\cos\frac{x}{2}-\frac{16}{5}\sin\frac{x}{2}\right)$. Общее решение исходного уравнения имеет вид $Y=C_1e^x+C_2e^{2x}-\frac{8}{5}e^x\left(\cos\frac{x}{2}+\right.$ $\left.+2\sin\frac{x}{2}\right)$.

8. Решить уравнение $5y''-6y'+5y=e^{2x}+2x^3-x+2$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет комплексные корни $k_{1,2}=\frac{3}{5}\pm\frac{4}{5}i$. Общее решение однородного уравнения есть $y=e^{3x/5}\left(C_1\cos\frac{4}{5}x+C_2\sin\frac{4}{5}x\right)$. Далее, находим частное решение $u_1=\frac{1}{13}e^{2x}$ уравнения $5y''-6y'+5y=e^{2x}$, а затем частное решение $u_2=\frac{1}{5}\left(2x^3+\frac{36}{5}x^2+\frac{107}{25}x-\frac{908}{125}\right)$ уравнения $5y''-6y'+5y=2x^3-x+2$ (проведите вычисления самостоятельно). В силу теоремы 2, общее решение исходного уравнения имеет вид $Y=e^{3x/5}\times\left(C_1\cos\frac{4}{5}x+C_2\sin\frac{4}{5}x\right)+\frac{1}{13}e^{2x}+\frac{1}{5}\left(2x^3+\frac{36}{5}x^2+\frac{107}{25}x-\frac{908}{125}\right)$.

4⁰. Упражнения

Решите уравнения.

1. $y''-4y'+13y=13x^2+5x-15$.
2. $y''+2y'+y=5$.
3. $y''-4y=8x^3$.
4. $y''+3y'+2y=\sin 2x+2\cos 2x$.
5. $y''+y=x+2e^x$.
6. $y''-3y'+2y=e^x$.
7. $y''+5y'+6y=e^{-x}+e^{-2x}$.
8. $\frac{d^2s}{dt^2}+2\frac{ds}{dt}+2s=2t^3-2$.

Решите задачи Коши:

9. $4y''-y=x^3-24x$, $y(0)=2$; $y'(0)=2$.
10. $y''+y'-2y=6x^2$, $y(0)=-11/2$; $y'(0)=2$.

Решите уравнения методом вариации произвольных постоянных:

11. $y''+4y'+4y=e^{-2x}\ln x$.
12. $y''+y=\frac{1}{\cos^3 x}$.
13. $y''-2y'+y=\frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$.

§ 3.9*. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида (дополнения)

Дадим некоторые разъяснения относительно двух правил, сформулированных в § 3.8 для уравнения (11). Рассмотрим уравнение вида

$$y''+py'+qy=ae^{\alpha x}\quad (a=\text{const}). \tag{1}$$

Пусть α не является корнем характеристического уравнения. Будем искать частное решение уравнения (1) в том же виде, что и его правая часть, т. е. в виде $y_* = A e^{\alpha x}$, где A — неопределенный коэффициент Имеем $y'_* = \alpha A e^{\alpha x}$, $y''_* = \alpha^2 A e^{\alpha x}$. Подставляя эти выражения в уравнение (1), получим

$$A(\alpha^2 + p\alpha + q) e^{\alpha x} = a e^{\alpha x}. \tag{2}$$

Сократив на ненулевой множитель $e^{\alpha x}$ и разделив обе части равенства на $\alpha^2 + p\alpha + q \neq 0$ (так как α не является корнем характеристического уравнения), находим $A = a/(\alpha^2 + p\alpha + q)$. Таким образом, в этом случае частное решение найдено.

Если α — однократный корень характеристического уравнения, то $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$ и, очевидно, что соотношение (2) не обращается в тождество ни при каком значении A (поскольку $a \neq 0$). Следовательно, частное решение надо искать в другом виде. Пусть $y_* = Axe^{\alpha x}$, тогда $y'_* = A(\alpha x + 1) e^{\alpha x}$, $y''_* = A(\alpha^2 x + 2\alpha) e^{\alpha x}$. Подставляя y_*' и y_*'' в уравнение (1), получим

$$A(2\alpha + p) e^{\alpha x} = ae^{\alpha x}, \tag{3}$$

так как $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$. Отсюда $A = a/(2\alpha + p)$ (поскольку $2\alpha + p \neq 0$: корень α — однократный). Если же α — двукратный корень характеристического уравнения, то частное решение следует искать в виде $y_* = Ax^2 e^{\alpha x}$ (проверьте).

Таким образом, каждый раз *с увеличением кратности r корня α на единицу в частном решении на единицу увеличивается показатель степени r множителя x^r.*

Далее, рассмотрим уравнение вида

$$y'' + py' + qy = a e^{\alpha x} x. \tag{4}$$

Пусть α не является корнем характеристического уравнения. Если искать частное решение уравнения (4) в том же виде, что и его правая часть, т. е. в виде $y_* = A e^{\alpha x} x$, то не достигнем нужного результата. Действительно, $y'_* = A e^{\alpha x} \times (1 + \alpha x)$, $y''_* = A e^{\alpha x}(2\alpha + x\alpha^2)$. Подставляя y_*' и y_*'' в уравнение (4), имеем

$$A e^{\alpha x}[x(\alpha^2 + p\alpha + q) + 2\alpha + p] = a e^{\alpha x} x. \tag{5}$$

Очевидно, что соотношение (5) не обращается в тождество ни при каком значении A. В самом деле, приравнивая соответственно коэффициенты при первых степенях x и свободные члены, получим противоречивую систему

$$\begin{cases} A(\alpha^2 + p\alpha + q) = a, \\ A(2\alpha + p) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{a}{\alpha^2 + p\alpha + q}, \\ A = 0, \end{cases}$$

поскольку $a \neq 0$ и $2\alpha + p \neq 0$ (α не является корнем уравнения) Следовательно, частное решение надо искать иначе. Будем искать его в виде $y_* = e^{\alpha x}(Ax + B)$ Тогда, подставляя y_* в уравнение (4), получим

$$Ae^{\alpha x}(\alpha^2 + p\alpha + q)x + e^{\alpha x}[B(\alpha^2 + p\alpha + q) + A(2\alpha + p)] = ae^{\alpha x}x. \tag{6}$$

Приравнивая в соотношении (6) коэффициенты при одинаковых степенях x, имеем

$$\begin{cases} A(\alpha^2 + p\alpha + q) = a, \\ B(\alpha^2 + p\alpha + q) + A(2\alpha + p) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{a}{\alpha^2 + p\alpha + q}; \\ B = -\dfrac{a}{(\alpha^2 + p\alpha + q^2)(2\alpha + p)}, \end{cases}$$

поскольку α не является корнем характеристического уравнения.

Таким образом, при наличии в правой части уравнения (4) множителя x необходимо ввести в частное решение многочлен первой степени. Далее, в силу теоремы 2 § 3.8 по индукции можно показать, что *если правая часть содержит в качестве множителя многочлен $P_n(x)$ степени $n \geqslant 0$, то необходимо ввести в частное решение многочлен $Q_n(x)$ той же степени, но с неопределенными коэффициентами*.

Рассмотрим теперь уравнение

$$y'' + py' + qy = e^{\alpha x}(a\cos\beta x + b\sin\beta x). \tag{7}$$

Покажем, что этот случай можно свести к двум предыдущим с помощью формул Эйлера

$$\cos\beta x = \frac{e^{\beta xi} + e^{-\beta xi}}{2}, \quad \sin\beta x = \frac{e^{\beta xi} - e^{-\beta xi}}{2i}.$$

Используя эти соотношения, представим правую часть уравнения (7) в виде

$$f(x) = \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2i}\right)e^{(\alpha+i\beta)x} + \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2i}\right)e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

Если числа $\alpha \pm i\beta$ не являются корнями характеристического уравнения, то в силу теоремы 2 § 3.8 и рассуждений, приведенных в начале этого параграфа, частное решение уравнения (7) следует искать в виде $y_* = \tilde{A}e^{(\alpha+i\beta)x} + \tilde{B}e^{(\alpha-i\beta)x}$, или, возвращаясь от показательных функций к тригонометрическим по формуле (8) § 3.7*, в виде $y_* = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$, где A и B — неопределенные коэффициенты (отличные от $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$). Если же $\alpha \pm i\beta$ — корни характеристического уравнения, то в частное решение следует ввести множитель x^r, где r — кратность корня.

В подробных курсах доказывается более общий результат, чем правила I и II § 3.8. Приведем его без доказательства.

Пусть правая часть уравнения (11) § 3.8 имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x}[P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x],$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены от x. Тогда частное решение следует искать в виде

$$y_* = e^{\alpha x}[M_n(x)\cos\beta x + N_n(x)\sin\beta x], \tag{8}$$

где n — наибольшая из степеней многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, а $M_n(x)$ и $N_n(x)$ — многочлены степени n с неопределенными коэффициентами. Если $\alpha \pm i\beta$ — корни кратности r характеристического уравнения, то функцию (8) следует умножить на x^r.

§ 3.10*. Понятие о краевых задачах для обыкновенных дифференциальных уравнений

Ранее мы рассматривали задачу Коши. Однако часто (например, при решении задач математической физики) возникает необходимость найти такое решение, которое принимало бы заданные числовые значения на концах рассматриваемого отрезка. Такие задачи называются *краевыми (граничными) задачами*. Поясним сказанное на примере линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{1}$$

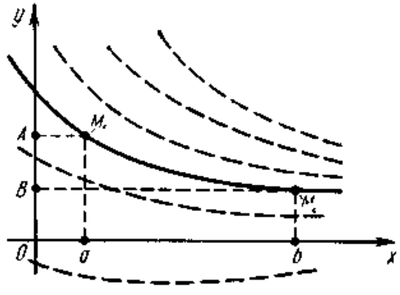


Рис. 60

Очевидно, задача Коши для уравнения (1) должна иметь два начальных условия $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0$, которые позволяют определить из общего решения значения двух постоянных C_1 и C_2 (см § 3.6) и тем самым выделить искомое решение. При постановке краевой задачи для уравнения (1) также требуются два условия для определения значений C_1 и C_2, но они задаются иначе. Например, их можно задать так: найти решение уравнения (1) на отрезке $[a, b]$, принимающее на его концах значения

$$y(a)=A, \quad y(b)=B, \tag{2}$$

где A и B — некоторые постоянные. Условия вида (2) называются *краевыми условиями*. Таким образом, в этой задаче из множества интегральных кривых требуется выделить ту, которая проходит через точки $M_1(a, A)$ и $M_2(b, B)$ (рис 60). Заметим, что краевая задача не всегда разрешима.

Примеры. 1. Решить краевую задачу для уравнения $y''-y=0$ с краевыми условиями $y(0)=0$, $y(2\pi)=1$.

Решение. Это — уравнение вида (1), где $p(x)\equiv 0$, $q(x)\equiv -1$. Краевые условия имеют вид (2) где $a=0$, $b=2\pi$, $A=0$, $B=1$ Общее решение исходного однородного уравнения есть $y(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}$. Для определения значений постоянных C_1 и C_2 воспользуемся краевыми условиями. Подставляя в общее решение $x=0$, получим $y(0)=C_1+C_2$, а подставляя в него $x=2\pi$, имеем $y(2\pi)=C_1e^{2\pi}+C_2e^{-2\pi}$. Таким образом, приходим к системе уравнений $C_1+C_2=0$, $C_1e^{2\pi}+C_2e^{-2\pi}=1$, определитель которой $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{2\pi} & e^{-2\pi} \end{vmatrix} = e^{-2\pi}-e^{2\pi}=-2\operatorname{sh}2\pi\neq 0$ (здесь $\operatorname{sh}2\pi=(e^{2\pi}-e^{-2\pi})/2$ — гиперболический синус) Следовательно, эта система имеет единственное решение $C_1=\dfrac{1}{2\operatorname{sh}2\pi}$, $C_2=-\dfrac{1}{2\operatorname{sh}2\pi}$. Искомое частное решение имеет вид $y(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2\operatorname{sh}2\pi}=\dfrac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{sh}2\pi}$, т. е. данная задача разрешима.

2. Решить краевую задачу $y''+y=0$, $y(0)=0$, $y(2\pi)=1$

Решение. Общее решение уравнения имеет вид $y(x)=C_1\sin x+C_2\cos x$ Используя краевые условия, получим систему уравнений $0\cdot C_1+1\cdot C_2=0$, $0\cdot C_1+1\cdot C_2=1$, определитель которой $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=0$. Так как определитель $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1$ отличен от нуля, то система решений не имеет (см том I, § 1.9). Следовательно, краевая задача не разрешима.

Для уравнения второго порядка могут быть заданы краевые условия более общего вида

$$\alpha y(a)+\beta y'(a)=A, \quad \gamma y(b)+\delta y'(b)=B, \tag{3}$$

где α, β, γ, δ — некоторые постоянные, не равные нулю одновременно. Легко видеть, что краевые условия (2) являются частным случаем краевых условий (3), если $\alpha=\gamma=1$ и $\beta=\delta=0$.

Если $A=B=0$, то краевые условия (3) называются *однородными;* если же хотя бы одна из постоянных A, B не равна нулю — *неоднородными.*

Как видно из примеров 1 и 2, при решении краевой задачи для линейного дифференциального уравнения (1) нужно найти его общее решение $y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$, где $y_1(x)$, $y_2(x)$ — два линейно независимых решения уравнения (1), а затем подставить в него краевые условия (3). При этом получается некоторая линейная система двух уравнений относительно двух неизвестных C_1 и C_2.

Если краевые условия (3) не являются однородными, то полученная система — также неоднородная, и, как известно, имеет единственное решение при условии, что ее определитель не равен нулю. В этом случае краевая задача разрешима. В том случае, когда система не имеет решений, и краевая задача не разрешима.

Если краевые условия (3) являются однородными, то полученная система — также однородная. Так как однородная система линейных уравнений всегда совместна (она имеет нулевое решение $C_1=C_2=0$), то краевая однородная задача всегда разрешима (она имеет нулевое решение $y(x)=0\cdot y_1(x)+0\cdot y_2(x)\equiv 0$). В этом случае представляют интерес ненулевые решения краевой задачи. При определенных соотношениях между функциями $p(x)$ и $q(x)$ уравнения (1) краевая задача может иметь ненулевые решения. Чтобы найти их, вводят некоторый параметр λ и находят те значения λ, при которых ненулевое решение существует. Эти значения λ называют *собственными значениями,* а соответствующие им решения краевой задачи — *собственными функциями.*

Примеры. 3. Решить краевую задачу $y''+y=0$, $y(0)=0$, $y(\pi/2)=\alpha$.

Решение. Краевые условия не являются однородными ($B=\alpha\neq 0$); следовательно, эта задача не всегда разрешима. Общее решение данного уравнения имеет вид $y(x)=C_1\sin x+C_2\cos x$. Подставляя в это выражение краевые условия, получим систему $0\cdot C_1+1\cdot C_2=0$, $1\cdot C_1+0\cdot C_2=\alpha$, определитель которой $\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1\neq 0$. Значит, система имеет единственное решение $C_1=\alpha$, $C_2=0$, откуда $y(x)=\alpha\sin x$, т. е. краевая задача разрешима. Если бы $\alpha=0$ (при однородных краевых условиях), то краевая задача имела бы только нулевое решение.

4. Решить краевую задачу $y''+\lambda^2y=0$, $y'(0)=0$, $y'(\pi)=0$, где λ — параметр.

Решение. Краевые условия этой задачи имеют вид (3), где $\alpha=\gamma=0$ и $\beta=\delta=1$. Так как $A=B=0$, то краевые условия являются однородными и краевая задача разрешима; она имеет по крайней мере нулевое решение $y(x)\equiv 0$. Найдем ненулевые решения этой задачи. Общее решение исходного уравнения есть $y(x,\lambda)=C_1\sin\lambda x+C_2\cos\lambda x$. Чтобы воспользоваться краевыми условиями, находим $y'(x,\lambda)=C_1\lambda\cos\lambda x-C_2\lambda\sin\lambda x$. Подставляя в выражение для производной $y'(x,\lambda)$ сначала $x=0$, а затем $x=\pi$, получим однородную систему

$$\lambda\cdot C_1+0\cdot C_2=0,\ (\lambda\cos\lambda\pi)C_1-(\lambda\sin\lambda\pi)C_2=0,$$

которая имеет ненулевое решение, если ее определитель равен нулю, т. е. $\begin{vmatrix}\lambda & 0\\ \lambda\cos\lambda\pi & -\lambda\sin\lambda\pi\end{vmatrix}=-\lambda^2\sin\lambda\pi=0.$

Пусть $\lambda\neq 0$; тогда $\sin\lambda\pi=0$ или $\lambda\pi=\pi n$, где $n\in\mathbf{N}$. Отсюда находим собственные значения параметра $\lambda=n$ ($n\in\mathbf{N}$) и собственные функции $y(x)=C_n\cos nx$ (где C_n — произвольные постоянные), являющиеся ненулевыми решениями краевой задачи.

Пусть $\lambda=0$; тогда данное уравнение примет вид $y''=0$. Его общее решение есть $y(x)=C_1x+C_2$. Так как $y'(x)=C_1$, то, используя краевые условия, получим систему, из которой находим, что $C_1=0$, C_2 — произвольное число. Следовательно, $y(x)=C_2$. Тот же результат получается, если в предыдущем решении $y(x)=C_n\cos nx$ положить $n=0$, что соответствует $\lambda=0$.

5. При каких условиях уравнение $y''+\lambda y=0$ имеет ненулевое решение, удовлетворяющее краевым условиям $y(0)+y'(0)=0$, $y(\pi)+y'(\pi)=0$?

Решение. Здесь даны однородные краевые условия вида (3) при $\alpha=\beta=\gamma=\delta=1$, $A=B=0$ Вид общего решения исходного уравнения существенно зависит от корней характеристического уравнения $k^2+\lambda=0$ или $k^2=-\lambda$. Рассмотрим следующие три случая.

Пусть $\lambda<0$; тогда $-\lambda>0$ и характеристическое уравнение имеет действительные различные корни $k_{1,2}=\pm\sqrt{-\lambda}$. Общее решение примет вид $y(x,\lambda)=C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$. Дифференцируя, получим $y'(x,\lambda)=\sqrt{-\lambda}C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x}-\sqrt{-\lambda}C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$. Подставляя в выражения $y(x,\lambda)$ и $y'(x,\lambda)$ сначала $x=0$, а затем $x=\pi$, получим систему

$$(1+\sqrt{-\lambda})C_1+(1-\sqrt{-\lambda})C_2=0,$$

$$e^{\sqrt{-\lambda}\pi}(1+\sqrt{-\lambda})C_1+e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}(1-\sqrt{-\lambda})C_2=0.$$

Так как краевые условия являются однородными, то для существования ненулевых решений необходимо, чтобы

$$\begin{vmatrix} 1+\sqrt{-\lambda} & 1-\sqrt{-\lambda} \\ (1+\sqrt{-\lambda})e^{\sqrt{-\lambda}\pi} & (1-\sqrt{-\lambda})e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} \end{vmatrix}=(1+\lambda)\left(e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}-e^{\sqrt{-\lambda}\pi}\right)=0,$$

что возможно только при $\lambda=-1$ (выражение во вторых скобках отлично от нуля). Следовательно, $y(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}$. Для определения C_1 и C_2 при $\lambda=-1$ имеем $2C_1+0\cdot C_2=0$, $2e^{\pi}\cdot C_1+0\cdot e^{-\pi}\cdot C_2=0$, откуда $C_1=0$, а $C_2=C$ — произвольная постоянная. Краевая задача имеет ненулевое решение $y(x)=Ce^{-x}$ (если $C=0$, то получим тривиальное решение $y(x)\equiv0$).

Пусть $\lambda=0$; тогда $k_{1,2}=0$ и $y(x)=C_1x+C_2$. Используя краевые условия, получим систему $2C_1+0\cdot C_2=0$, $(1+\pi)C_1+C_2=0$, определитель которой $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1+\pi & 1 \end{vmatrix}=2\neq0$. Следовательно, краевая задача ненулевых решений не имеет.

Пусть $\lambda>0$; тогда $k_{1,2}=\pm i\sqrt{\lambda}$ и общее решение имеет вид $y(x,\lambda)=C_1\sin\sqrt{\lambda}x+C_2\cos\sqrt{\lambda}x$. Дифференцируя, находим $y'(x,\lambda)=\sqrt{\lambda}C_1\cos\sqrt{\lambda}x-\sqrt{\lambda}C_2\sin\sqrt{\lambda}x$. После подстановки краевых условий получим

$$\sqrt{\lambda}C_1+C_2=0,\ (\sin\sqrt{\lambda}\pi+\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\pi)C_1+(\cos\sqrt{\lambda}\pi-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi)C_2=0.$$

Чтобы определитель системы был равен нулю, необходимо выполнение соотношения $(\lambda+1)\sin\sqrt{\lambda}\pi=0$. Поскольку $\lambda\neq-1$ $(\lambda>0)$, имеем $\sin\sqrt{\lambda}\pi=0$ или $\sqrt{\lambda}\pi=\pi n$ (где $n\in\mathbf{N}$), откуда $\lambda=n^2$ и собственные функции имеют вид $y(x)=C_n\cos nx$.

Итак, исходная краевая задача имеет ненулевое решение $y(x)=Ce^{-x}$ при $\lambda=-1$ и $y(x)=C_n\cos nx$ при $\lambda=n^2$, где $n\in\mathbf{N}$

Глава IV

СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 4.1. Нормальные системы дифференциальных уравнений и векторная форма их записи. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Понятие об общем, частном, особом и составном решениях. Метод исключения

1°. Нормальные системы дифференциальных уравнений. В предыдущей главе были рассмотрены дифференциальные уравнения, в которые входит лишь одна искомая функция и ее производные. На практике часто встречаются задачи, приводящие к таким дифференциальным уравнениям, которые содержат несколько искомых функций одного аргумента.

Определение 1. Нормальной системой обыкновенных дифференциальных уравнений *порядка n* называется совокупность n дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$y_i' = f_i(x,\ y_1,\ y_2, \dots, y_n) \quad (i = 1,\ 2, \dots, n), \tag{1}$$

где функции $f_i : G \to \mathbf{R}^n$ $(i = 1, \dots, n)$ определены и непрерывны на открытом множестве $G \subset \mathbf{R}^{n+1}$; x — независимая переменная; y_1, $y_2, \dots, y_n$ — искомые функции от x; $y_1', y_2', \dots, y_n'$ — их первые производные по x.

Комментарии к определению 1. 1) В нормальной системе все уравнения разрешены относительно производных y_i' $(i = 1, 2, \dots, n)$.

2) В нормальной системе производные искомых функций имеют только первый порядок.

Для краткости применяют *векторную форму записи нормальной* *системы*. Рассмотрим вектор $\vec{y}=(y_1, y_2, ..., y_n)$ и вектор-функцию $\vec{f}(x, \vec{y})=(f_1(x, \vec{y}), ..., f_n(x, \vec{y}))$. Тогда нормальная система (1) в векторной форме примет вид

$$\vec{y}\,'=\vec{f}(x, \vec{y}), \tag{2}$$

где $\vec{y}\,'=(y_1', ..., y_n')$ — производная вектора $\vec{y}$ по x.

Примеры. 1. Привести к нормальному виду систему

$$4\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}+3x=\sin t,\ \frac{dx}{dt}+y=\cos t.$$

Решение. Из второго уравнения имеем $x'=-y+\cos t$. Подставляя это выражение в первое уравнение и разрешая его относительно y', получаем $y'=4\cos t-\sin t+3x-4y$. Система уравнений

$$x'=\cos t-y,\ y'=4\cos t-\sin t+3x-4y$$

является нормальной системой второго порядка.

2. Привести к нормальному виду систему

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}+\frac{dy_2}{dx}+y_1=e^x,\ \frac{dy_1}{dx}+\frac{d^2y_2}{dx^2}=1.$$

Решение. Введем дополнительные искомые функции $y_3=\frac{dy_1}{dx}$, $y_4=\frac{dy_2}{dx}$; тогда $\frac{d^2y_1}{dx^2}=\frac{dy_3}{dx}=y_3'$, $\frac{d^2y_2}{dx^2}=\frac{dy_4}{dx}=y_4'$. Из первого уравнения системы имеем $y_3'+y_4+y_1=e^x$, из второго уравнения $y_3+y_4'=1$ В результате получим нормальную систему четвертого порядка:

$$y_1'=y_3,\ y_2'=y_4,\ y_3'=e^x-y_1-y_4,\ y_4'=1-y_3.$$

Из примеров 1 и 2 видно, что к нормальному виду при определенных условиях могут быть приведены системы дифференциальных уравнений, содержащие производные первого порядка, а также (с помощью введения дополнительных переменных) системы, содержащие производные высших порядков.

Определение 2. Решением на интервале $I\subset\mathbf{R}$ *нормальной системы* (1) называется совокупность n дифференцируемых на I функций $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$, такая, что точка $(x, y_1(x), ..., y_n(x))$ принадлежит открытому множеству $G\subset\mathbf{R}^{n+1}$ при любом x из интервала I и имеют место равенства

$$y_i'(x)=f_i(x, y_1(x), ..., y_n(x))\quad (i=1, ..., n)\ \forall x\in I,$$

т. е. совокупность $(y_1(x), ..., y_n(x))$ при подстановке в уравнения (1) обращает их в тождества.

Определение 3. Решением в неявном виде на интервале $I\subset\mathbf{R}$ *нормальной системы* (1) называется совокупность n соотношений

$\Phi_i(x, y_1, \ldots, y_n)=0$ $(i=1, \ldots, n)$, определяющих совокупность n неявных функций $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, которая является решением системы (1) на интервале I.

Пример 3. Показать, что совокупность функций $y_1(x)=-\frac{x^3}{6}+e^x$, $y_2(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-e^x$, $y_3(x)=-\frac{x^2}{2}+e^x$, $y_4(x)=x+\frac{x^3}{6}-e^x$ есть решение нормальной системы из примера 2.

Решение. Находим производные $y_1'=-\frac{x^2}{2}+e^x$, $y_2'=x+\frac{x^3}{6}-e^x$, $y_3'=-x+e^x$, $y_4'=1+\frac{x^2}{2}-e^x$. Подставляя данные функции и их производные в каждое уравнение системы, получим тождества (проверьте это). Значит, заданная совокупность функций есть решение указанной системы.

2⁰. Задача Коши. Понятие общего и частного решений. *Задача Коши для системы* (1) формулируется так: найти решение $(y_1(x), \ldots, y_n(x)$ этой системы, удовлетворяющее условиям

$$y_i(x_0)=y_{i0} \quad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

где $x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}$ — заданные числа, называемые *начальными условиями* (данными).

Решение задачи Коши существуют не всегда. Приведем признак однозначной разрешимости задачи Коши.

Теорема (о существовании и единственности решения задачи Коши). *Пусть правые части f_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ нормальной системы* (1) *и их частные производные по переменным $y_1, y_2, \ldots, y_n$ определены и непрерывны на открытом множестве $D\subset\mathbf{R}^{n+1}$ переменных $x, y_1, \ldots, y_n$. Тогда в некоторой окрестности $|x-x_0|<\delta$ точки x_0 существует непрерывное решение $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ задачи Коши* (1), (3), *где $(x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})\in D$. Это решение единственно, т. е. если $y_i^1(x)$ и $y_i^2(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ — два непрерывных решения задачи Коши* (1), (3), *то $y_i^1(x)=y_i^2(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ для всех x, при которых эти решения определены.*

Доказательство этой теоремы можно найти в более подробных курсах.

Комментарии к теореме. 1) В теории дифференциальных уравнений сформулированная теорема имеет разные названия: теорема Пикара, теорема Пикара — Линделефа, теорема Коши, теорема Коши — Липшица и т. д.

2) Очевидно, что множество D является подмножеством множества G из определения 1, т. е. $D\subseteq G\subset\mathbf{R}^{n+1}$.

3) Теорема гарантирует существование решения задачи Коши лишь в малой окрестности точки x_0.

Определение 4. Множество $D \subseteq G \subset \mathbf{R}^{n+1}$, в каждой точке которого существует и притом единственное решение задачи Коши (1), (3), называется *облачностью единственности системы* (1).

Если в каждой точке множества $D \subseteq G \subset \mathbf{R}^{n+1}$ выполнены условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши, то D — область единственности.

Определение 5. Пусть $D \subseteq G$ — область единственности решения задачи Коши для системы (1). Совокупность n функций

$$y_i = y_i(x,\ C_1,\ C_2, \ldots, C_n) \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{4}$$

зависящих от n параметров $C_1, \ldots, C_n$ и имеющих непрерывные частные производные по x, называется *общим решением системы* (1) в $D \subseteq G$, если:

1) соотношения (4) разрешимы относительно произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_n$ при всех $(x, y_1, \ldots, y_n) \in D$, т. е.

$$C_i = \psi_i(x,\ y_1, \ldots, y_n) \quad (i = 1, \ldots, n); \tag{5}$$

2) совокупность (4) является решением системы (1) при всех $C_1, \ldots, C_n$, получаемых из соотношений (5), когда $(x, y_1, \ldots, y_n) \in D \subset \mathbf{R}^{n+1}$.

Определение 6. Общим решением в неявном виде (или *общим интегралом*) *системы* (1) в области единственности $D \subseteq G$ называется совокупность n соотношений $\Phi_i\ (x,\ y_1, \ldots, y_n) = C_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, содержащая n параметров $C_1, \ldots, C_n$ и в неявном виде описывающая семейство функций, являющихся общим решением системы (1) в D.

Комментарии к определению 6. 1) Часто общим интегралом называют не сами соотношения, а совокупность n функций $\Phi_i(x, y_1, \ldots, y_n)$, $i = 1, \ldots, n$. Каждое из соотношений $\Phi_i = C_i$ (или каждую из функций Φ_i) называют *первым интегралом системы* (1).

2) Иногда общим решением системы (1) в неявном виде (или общим интегралом) называют совокупность соотношений

$$\Phi_i(x,\ y_1, \ldots, y_n,\ C_1, \ldots, C_n) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{6}$$

являющуюся более общей, чем совокупность соотношений $\Phi_i\ (x, y_1, \ldots, y_n) = C_i\ (i = 1, \ldots, n)$.

Если известно общее решение системы (1) в области единственности $D \subseteq G$, то задача Коши для системы (1) с начальными значениями из $D \subseteq G$ всегда однозначно разрешима.

Определение 7. Решение системы (1), во всех точках которого выполняется свойство единственности решения задачи Коши, называется *частным решением системы* (1). Решение системы (1), во всех точках которого нарушено свойство единственности, называется *особым решением системы* (1).

Комментарии к определению 7. 1) Решение системы (1), не удовлетворяющее определению 7, называется *составным решением*.

2) Совокупность частных, особых и составных решений системы (1) задает все решения системы (1).

Из определения общего и частного решений следует, что все решения, полученные из общего при конкретных значениях постоянных $C_1, \ldots, C_n$, являются частными решениями, если $(x, y_1, \ldots, y_n) \in D$.

При решении задачи Коши поступают следующим образом. Сначала определяют область единственности $D \subseteq G$ системы (1), затем проверяют, принадлежит ли точка $(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0})$, определяемая начальными условиями (3), области D. Если $(x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}) \notin D$, то искомое решение либо не единственно, либо вообще не существует. Если же $(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}) \in D$, то задача Коши однозначно разрешима. Чтобы найти ее решение, сначала ищут общее решение, а затем, используя начальные условия (3), составляют систему n уравнений для определения n значений постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Примеры. 1. Показать, что совокупность функций $y_1(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$, $y_2(x) = C_1 e^{-x} + 3C_2 e^{-3x} + \cos x$ является общим решением нормальной системы

$$y_1' = \cos x - y_2, \quad y_2' = 4\cos x - \sin x + 3y_1 - 4y_2.$$

Решение. Здесь $f_1(x, y_1, y_2) = \cos x - y_2$, $f_2(x, y_1, y_2) = 4\cos x - \sin x + 3y_1 - 4y_2$. Находим частные производные по переменным y_1 и y_2: $\frac{\partial f_1}{\partial y_1} = 0$; $\frac{\partial f_1}{\partial y_2} = -1$; $\frac{\partial f_2}{\partial y_1} = 3$; $\frac{\partial f_2}{\partial y_2} = -4$. Очевидно, что все функции непрерывны для любых значений $(x, y_1, y_2) \in \mathbf{R}^3$. Значит, $D = \mathbf{R}^3$. Для всех $(x, y_1, y_2) \in D$ соотношения

$$y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}, \quad y_2 = C_1 e^{-x} + 3C_2 e^{-3x} + \cos x \qquad (*)$$

разрешимы относительно C_1 и C_2. Действительно, вычитая из второго уравнения первое, имеем $y_2 - y_1 = 2C_2 e^{-3x} + \cos x$, а умножая первое уравнение системы на 3 и вычитая его из второго, находим $y_2 - 3y_1 = -2C_1 e^{-x} + \cos x$. Тогда получим совокупность соотношений вида (5):

$$C_1 = \frac{1}{2} e^{x}(3y_1 - y_2 + \cos x), \quad C_2 = \frac{1}{2} e^{3x}(y_2 - y_1 - \cos x).$$

Продифференцируем по x равенства (*), учитывая, что C_1 и C_2 — постоянные:

$$y_1' = -C_1 e^{-x} - 3C_2 e^{-3x}, \quad y_2' = -C_1 e^{-x} - 9C_2 e^{-3x} - \sin x. \qquad (**)$$

Подставляя выражения (*) и (**) в нормальную систему, получим тождества, справедливые для любых значений C_1 и C_2. Следовательно, совокупность функций (*) является общим решением заданной нормальной системы.

2. Решить задачу Коши для нормальной системы из примера 1 с начальными условиями $y_1(0)=-1$; $y_2(0)=2$.

Решение. Ясно, что точка $(0, -1, 2) \in D = \mathbb{R}^3$ и, значит, решение задачи Коши существует и единственно. В примере 1 показано, что совокупность функций (*) есть общее решение данной нормальной системы. Подставляя начальные значения $x_0=0$, $y_{10}=-1$, $y_{20}=2$ в равенства (*), получим $-1=C_1+C_2$, $2=C_1+3C_2+1$, откуда $C_1=-3$, $C_2=2$. Итак, искомое частное решение имеет вид $y_1(x)=-3e^{-x}+2e^{-3x}$, $y_2(x)=-3e^{-x}+6e^{-3x}+\cos x$.

3⁰. Метод исключения. *Метод исключения* позволяет свести решение нормальной системы (1) n-го порядка к решению одного дифференциального уравнения n-го порядка. Сущность этого метода заключается в последовательном исключении искомых функций $y_2, y_3, \ldots, y_n$ из уравнений системы (1).

Сначала продифференцируем по x первое уравнение нормальной системы (1):

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot y_1' + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot y_2' + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot y_n'.$$

Учитывая остальные уравнения системы, перепишем это выражение в виде

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot f_2 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot f_n.$$

Так как правая часть представляет собой функцию от $x, y_1, \ldots, y_n$, то полученное соотношение можно записать следующим образом: $y_1''=F_1(x, y_1, \ldots, y_n)$. Последнее равенство вновь продифференцируем по x, учитывая остальные уравнения системы. Тогда получим

$$y_1''' = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdot f_1 + \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \cdot f_2 + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \cdot f_n.$$

По аналогии с предыдущим запишем $y_1'''=F_2(x, y_1, \ldots, y_n)$.

Этот процесс продолжаем до тех пор, пока не найдем n-ю производную $y_1^{(n)}$, т. е. $y_1^{(n)}=F_{n-1}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Таким образом, получим систему n дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_1'' = F_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_1^{(n)} = F_{n-1}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases} \tag{7}$$

В системе (7) выделим первые $n-1$ уравнений. Из них при определенных условиях можно найти выражения $n-1$ переменных $y_2, y_3,$

..., y_n через переменные $x, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}$. Подставляя эти выражения вместо $y_2, y_3, \ldots, y_n$ в последнее уравнение системы (7), получим дифференциальное уравнение n-го порядка:

$$y_1^{(n)}=F_n(x,\ y_1,\ y_1',\ y_1'',\ldots,y_1^{(n-1)}). \tag{8}$$

Из способа получения уравнения (8) вытекает, что если совокупность функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ есть решение нормальной системы (1), то функция $y_1(x)$ является решением уравнения (8) и, наоборот, по известному решению $y_1(x)$ уравнения (8) можно, найдя производные $y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}$ и подставляя их в систему (7), найти $y_2(x), \ldots, y_n(x)$.

Примеры. 1. Найти общее решение нормальной системы

$$y_1'=\cos x-y_2,\ y_2'=4\cos x-\sin x+3y_1-4y_2.$$

Решение. Продифференцируем по x первое уравнение: $y_1''=-\sin x-y_2'$. Подставляя вместо y_2' правую часть второго уравнения системы, получим $y_1''=-4\cos x-3y_1+4y_2$. Чтобы исключить из этого уравнения y_2, находим из первого уравнения системы $y_2=\cos x-y_1'$; следовательно, $y_1''=-3y_1-4y_1'$. Перепишем полученное уравнение в виде $y_1''+4y_1'+3y_1=0$. Это — линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Его общее решение имеет вид $y_1=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Для нахождения y_2 используем соотношение $y_2=\cos x-y_1'$. Отсюда $y_2=C_1e^{-x}+3C_2e^{-3x}+\cos x$. Совокупность функций $y_1=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}$, $y_2=C_1e^{-x}+3C_2e^{-3x}+\cos x$ является общим решением данной нормальной системы, что было показано в примере 1 п. 2°.

2. Решить задачу Коши для системы

$$y_1'=2y_2-5y_1+e^x,\ y_2'=y_1-6y_2+e^{-2x},\ y_1(0)=\frac{3}{8},\ y_2(0)=-\frac{1}{20}.$$

Решение. Дифференцируя по x первое уравнение, находим $y_1''=2y_2'-5y_1'+e^x$. Подставим вместо y_2' правую часть второго уравнения: $y_1''=2y_1-12y_2+2e^{-2x}-5y_1'+e^x$. Из первого уравнения системы имеем $y_2=\frac{1}{2}y_1'+\frac{5}{2}y_1-\frac{1}{2}e^x$. Далее, из последних двух равенств получим $y_1''+11y_1'+28y_1=7e^x+2e^{-2x}$. Это линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами. Его общее решение есть $y_1=C_1e^{-7x}+C_2e^{-4x}+\frac{7}{40}e^x+\frac{1}{5}e^{-2x}$. Отсюда $y_2=-C_1e^{-7x}+\frac{1}{2}C_2e^{-4x}+\frac{1}{40}e^x+\frac{3}{10}e^{-2x}$. Подставляя начальные условия в выражения для y_1 и y_2, имеем $C_1+C_2=0$, $C_1-\frac{1}{2}C_2=\frac{3}{8}$, откуда $C_1=\frac{1}{4}$, $C_2=-\frac{1}{4}$. Решением задачи Коши является совокупность функций $y_1=\frac{1}{4}e^{-7x}-\frac{1}{4}e^{-4x}+\frac{7}{40}e^{x}+\frac{1}{5}e^{-2x}$, $y_2=$ $=-\frac{1}{4}e^{-7x}-\frac{1}{8}e^{-4x}+\frac{1}{40}e^{x}+\frac{3}{10}e^{-2x}$.

3. Найти общее решение системы

$$y_1'=\frac{y_1}{x},\quad y_2'=-\frac{x^2+y_1^2}{xy_2}.$$

Решение. Первое уравнение содержит только одну искомую функцию y_1, поэтому его можно проинтегрировать непосредственно. Это — уравнение с разделяющимися переменными; его общее решение имеет вид $y_1=C_1x$. Подставляя это выражение во второе уравнение системы, исключим из него y_1; получим $y_2'=-\frac{x}{y_2}\times$ $\times(1+C_1^2)$, т. е. уравнение с разделяющимися переменными; его общее решение имеет вид $y_2=\pm\sqrt{C_2-x^2(1+C_1^2)}$. Следовательно, совокупность функций $y_1=C_1x$, $y_2=\pm\sqrt{C_2-x^2(1+C_1^2)}$ является общим решением данной системы.

4. Решить задачу Коши для системы

$$y_1'=1-\frac{2y_1}{x},\quad y_2'=y_1+y_2-1+\frac{2y_1}{x};\quad y_1(1)=\frac{1}{3},\quad y_2(1)=-\frac{1}{3}.$$

Решение. Первое уравнение содержит только одну искомую функцию y_1 и является линейным уравнением первого порядка. Интегрируя его, получим $y_1=\frac{x}{3}+\frac{C_1}{x^2}$. Исключая y_1 из второго уравнения, находим $y_2'=y_2+\frac{1}{3}(x-1)+\frac{C_1}{x^2}\left(1-\frac{2}{x}\right)$. Это — линейное уравнение первого порядка; его общее решение имеет вид $y_2=-\frac{x}{3}-\frac{C_1}{x^2}+C_2e^{x}$. Подставляя начальные условия в выражения для y_1 и y_2, получим систему $\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+C_1$, $-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}-C_1+C_2$, откуда $C_1=0$, $C_2=0$. Итак, решением задачи Коши является совокупность функций $y_1=\frac{x}{3}$, $y_2=-\frac{x}{3}$.

4⁰. Упражнения

Решите методом исключения системы дифференциальных уравнений.

1. $\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dx}=-9y_2,\\[2mm] \dfrac{dy_2}{dx}=y_1.\end{cases}$ 2. $\begin{cases}y_1'=y_2+x,\\ y_2'=y_1-x.\end{cases}$

3. $\begin{cases} 4y_1' - y_2' + 3y_1 = \sin x, \\ y_1' + y_2 = \cos x. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} y_1' + y_1 - y_2 = e^x, \\ y_2' - y_1 + y_2 = e^x. \end{cases}$

Решите задачи Коши:

5. $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} + 3y_1 + 4y_2 = 0, \\ \dfrac{dy_2}{dx} + 2y_1 + 5y_2 = 0; \end{cases}$ $y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 4.$

6. $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 + 5y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -y_1 - 3y_2; \end{cases}$ $y_1(0) = -2,\ y_2(0) = 1.$

§ 4.2. Нормальные системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Структура общего решения. Решение в случае простых корней характеристического уравнения

1°. Нормальные системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Частным случаем нормальной системы является нормальная система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$y_i' = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{in}y_n \quad (i = 1,\ 2, \ldots, n), \tag{1}$$

где a_{ij} — заданные постоянные; $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — искомые функции аргумента x, по которому производится дифференцирование. Характерная особенность системы (1) состоит в том, что ее правые части представляют собой линейные функции относительно искомых функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Кроме того, правые части системы (1) не содержат явно аргумента x или заданных функций этого аргумента. Такие линейные системы называются *однородными*. Неоднородные системы будут рассмотрены в § 4.4.

Приведем примеры линейных однородных систем:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 2y_1 + y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 3y_1 + 4y_2; \end{cases} \quad \text{(а)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 4x - y + 4z. \end{cases} \quad \text{(б)}$$

Система (а) является нормальной системой двух линейных уравнений с двумя искомыми функциями $y_1(x)$ и $y_2(x)$; система (б) содержит три линейных уравнения и три искомых функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Для сокращения записи линейную систему с постоянными коэффициентами вида (1) записывают в *векторно-матричной форме.*

Обозначим матрицу коэффициентов системы (1) через $A=(a_{ij})$, где $i, j=1, \ldots, n$, а искомую вектор-функцию и ее производную соответственно через

$$\vec{y}(x)=\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad \vec{y}'(x)=\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}.$$

Тогда систему (1) можно записать в виде

$$\vec{y}'(x)=A\vec{y}(x). \tag{2}$$

Запишем, например, систему (а) в векторно-матричной форме. Обозначим

$$\vec{y}(x)=\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \quad \vec{y}'(x)=\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Тогда система примет вид $\vec{y}'(x)=A\vec{y}(x)$.

Запишем теперь систему (б) в векторно-матричной форме. Обозначим

$$\vec{u}(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{u}'(t)=\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Тогда система примет вид $\vec{u}'(t)=A\vec{u}(t)$.

Рассмотрим некоторые свойства решений нормальных линейных однородных дифференциальных систем с постоянными коэффициентами. Будем пользоваться векторно-матричной формой (2) записи системы.

Определение 1. Совокупность вектор-функций [решений системы (2)] $\vec{y}_1(x), \vec{y}_2(x), \ldots, \vec{y}_n(x)$ называется *линейно зависимой*, если

$$\alpha_1\vec{y}_1(x)+\alpha_2\vec{y}_2(x)+\ldots+\alpha_n\vec{y}_n(x)\equiv\vec{0},$$

где α_i — постоянные, не обращающиеся в нуль одновременно, $\vec{0}$ — нуль-вектор, т. е. $\vec{0}=(0, \ldots, 0)$. В противном случае совокупность решений $\vec{y}_1, \vec{y}_2(x), \ldots, \vec{y}_n(x)$ системы (2) называется *линейно независимой*.

Пример. Показать, что вектор-функции $\vec{y}_1(x)=\begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$, $\vec{y}_2(x)=\begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}$ линейно независимы.

Решение. Допустим противное, т. е. что вектор-функции $\vec{y}_1(x)$ и $\vec{y}_2(x)$ линейно зависимы. Тогда существуют не равные нулю постоянные α_1 и α_2 такие, что $\alpha_1\vec{y}_1(x)+\alpha_2\vec{y}_2(x)\equiv\vec{0}$. Это векторное тождество эквивалентно двум скалярным: $\alpha_1 \sin x+\alpha_2 \cos x\equiv 0$, $\alpha_1 \cos x-\alpha_2 \sin x\equiv 0$. Полученная система является однородной и, значит, имеет нулевое решение $\alpha_1=\alpha_2=0$. Как известно, ненулевое решение однородной системы существует лишь тогда, когда ее определитель равен нулю. Имеем

$$\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x-\cos^2 x\equiv -1\neq 0.$$

Следовательно, система имеет только нулевое решение, что противоречит предположению. Итак, данные вектор-функции $\vec{y}_1(x)$ и $\vec{y}_2(x)$ линейно независимы.

2⁰. Структура общего решения. *Определение 2.* Совокупность n линейно независимых решений $\vec{y}_1(x)$, $\vec{y}_2(x)$, ..., $\vec{y}_n(x)$ системы (2) называется *фундаментальной системой решений.*

Теорема. *Если совокупность вектор-функций $\vec{y}_1(x)$, $\vec{y}_2(x)$, ..., $\vec{y}_n(x)$ является фундаментальной системой решений для системы (2), то общее решение $\vec{y}(x)$ системы (2) записывается в виде*

$$\vec{y}(x)=C_1\vec{y}_1(x)+C_2\vec{y}_2(x)+\ldots+C_n\vec{y}_n(x), \tag{3}$$

где C_1, C_2, ..., C_n — произвольные постоянные.

Доказательство. Разобьем доказательство теоремы на две части. Сначала покажем, что если вектор-функции $\vec{y}_1(x)$, $\vec{y}_2(x)$, ... $\vec{y}_n(x)$ являются решениями системы (2), то их линейная комбинация $\vec{y}(x)$ вида (3) также есть решение системы (2). Подставим вектор-функцию $\vec{y}(x)$ в систему (2). Так как $\vec{y}_1(x)$, ..., $\vec{y}_n(x)$ — решения системы (2), то справедливы n тождеств $\vec{y}_1{}'(x)=A\vec{y}_1(x)$, ... $\vec{y}'_n(x)=A\vec{y}_n(x)$. Тогда $\vec{y}'(x)=C_1\vec{y}_1{}'(x)+\ldots+C_n\vec{y}'_n(x)=C_1A\vec{y}_1(x)+\ldots+C_nA\vec{y}_n(x)$. Учитывая соотношение (3), получим $\vec{y}'(x)=A\vec{y}(x)$. Следовательно, линейная комбинация (3) является решением системы (2).

Во второй части доказательства следует показать, что с помощью формулы (3) можно решить задачу Коши для системы (2) с начальным условием $\vec{y}(x_0)=\vec{y}_0$, где $\vec{y}_0$ — произвольный фиксированный начальный вектор. Эта часть доказательства приведена в п. 1⁰ § 4.3 *.

Итак, зная фундаментальную систему решений для системы (2), всегда можно записать ее общее решение в виде (3). Как же выяснить, является ли совокупность решений $\vec{y}_1(x), \vec{y}_2(x), \ldots, \vec{y}_n(x)$ фундаментальной системой? Составим из компонент n произвольных решений системы (2) матрицу размера $n\times n$:

$$Y(x)=\begin{pmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \ldots & y_{1j}(x) & \ldots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \ldots & y_{2j}(x) & \ldots & y_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \ldots & y_{nj}(x) & \ldots & y_{nn}(x) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где j-й столбец является решением $\vec{y}_j(x)$ системы (2).

Определение 3. Определителем Вронского (или *вронскианом*) $W(x)$ совокупности вектор-функций $\vec{y}_1(x), \vec{y}_2(x), \ldots, \vec{y}_n(x)$ называется определитель матрицы $Y(x)$, т. е. $W(x)=|Y(x)|=\det Y(x)$.

Комментарий к определению 3. Для вронскиана $W(x)$ справедливы утверждения, аналогичные тем, которые были сформулированы при рассмотрении одного линейного уравнения n-го порядка, а именно: если совокупность вектор-функций линейно зависима, то $W(x)\equiv 0$; если же совокупность вектор-функций линейно независима, то вронскиан $W(x)$ не обращается в нуль ни при каком значении x.

Таким образом, если вронскиан $W(x)$ не обращается в нуль ни при каком значении x, то система вектор-функций, из которых составлен определитель, является фундаментальной.

Пример. Показать, что совокупность вектор-функций $\vec{y}_1(x)=\begin{pmatrix}\sin x\\ \cos x\end{pmatrix}$, $\vec{y}_2(x)=\begin{pmatrix}\cos x\\ -\sin x\end{pmatrix}$ представляет собой фундаментальную систему.

Решение. Составим матрицу $Y(x)=\begin{pmatrix}\sin x & \cos x\\ \cos x & -\sin x\end{pmatrix}$ и вычислим ее определитель $W(x)=|Y(x)|=\begin{vmatrix}\sin x & \cos x\\ \cos x & -\sin x\end{vmatrix}\equiv -1\neq 0$.

Так как $W(x)\neq 0$, то данная совокупность вектор-функций есть фундаментальная система. Сравните это решение с решением примера п. 1^0.

Отметим, что результаты п. 2^0 остаются справедливыми и для более широкого класса систем вида (1), у которых коэффициенты a_{ij} являются известными непрерывными функциями аргумента x, т. е. $a_{ij}=a_{ij}(x)$.

3^0. Решение в случае простых корней характеристического уравнения. Рассмотрим вопрос о нахождении решений дифференциальной системы (1) с постоянными коэффициентами методом Эйлера. Будем искать решение системы (1) в виде

$$y_1=\alpha_1 e^{\lambda x},\ y_2=\alpha_2 e^{\lambda x},\dots,\ y_n=\alpha_n e^{\lambda x}, \tag{5}$$

где α_i $(i=1, 2,\dots, n)$ и λ — некоторые постоянные, подлежащие определению. Подставляя предполагаемое решение (5) в систему (1), получим

$$\alpha_i\lambda e^{\lambda x}=a_{i1}\alpha_1 e^{\lambda x}+a_{i2}\alpha_2 e^{\lambda x}+\dots+a_{in}\alpha_n e^{\lambda x},\ i=1,\ 2,\dots,n.$$

Так как $e^{\lambda x}\neq 0$ $\forall x$, то все уравнения последней системы можно сократить на множитель $e^{\lambda x}$. Перенося все члены уравнений вправо и приводя подобные члены, получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\dots+a_{1n}\alpha_n=0,\\ a_{21}\alpha_1+(a_{22}-\lambda)\alpha_2+\dots+a_{2n}\alpha_n=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{n1}\alpha_1+a_{n2}\alpha_2+\dots+(a_{nn}-\lambda)\alpha_n=0.\end{cases} \tag{6}$$

Система (6) является однородной и, следовательно, всегда имеет нулевое решение $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0$. Очевидно, что в этом случае система (1) в силу равенств (5) также имеет нулевое решение $y_1\equiv y_2\equiv\dots\equiv y_n\equiv 0$. Представляет интерес отыскание ненулевого решения системы (1). Известно, что для существования ненулевого решения системы (6) необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=0. \tag{7}$$

Раскрывая определитель n-го порядка в левой части равенства (7), получим многочлен n-й степени относительно λ. Следовательно, равенство (7) представляет собой алгебраическое уравнение n-й степени относительно λ. Оно называется *характеристическим уравнением* и имеет n корней. Эти корни могут быть действительными или комплексными, причем простыми (т. е. различными) или кратными (одинаковыми). Будем рассматривать только тот случай, когда все n корней уравнения (7) являются простыми (случай кратных корней изучается в более подробных курсах). Зная n простых корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ характеристического уравнения (7), можно найти n различных ненулевых решений системы (6):

$$\vec{\alpha}_1=\begin{pmatrix}\alpha_{11}\\ \alpha_{21}\\ \vdots\\ \alpha_{n1}\end{pmatrix},\ \vec{\alpha}_2=\begin{pmatrix}\alpha_{12}\\ \alpha_{22}\\ \vdots\\ \alpha_{n2}\end{pmatrix},\dots,\vec{\alpha}_n=\begin{pmatrix}\alpha_{1n}\\ \alpha_{2n}\\ \vdots\\ \alpha_{nn}\end{pmatrix}, \tag{8}$$

а следовательно, и n решений системы (1):

$$\vec{y}_1(x)=\begin{pmatrix}\alpha_{11}\,e^{\lambda_1 x}\\ \alpha_{21}\,e^{\lambda_1 x}\\ \vdots\\ \alpha_{n1}\,e^{\lambda_1 x}\end{pmatrix},\ \vec{y}_2(x)=\begin{pmatrix}\alpha_{12}\,e^{\lambda_2 x}\\ \alpha_{22}\,e^{\lambda_2 x}\\ \vdots\\ \alpha_{n2}\,e^{\lambda_2 x}\end{pmatrix},\dots,\ \vec{y}_n(x)=\begin{pmatrix}\alpha_{1n}\,e^{\lambda_n x}\\ \alpha_{2n}\,e^{\lambda_n x}\\ \vdots\\ \alpha_{nn}\,e^{\lambda_n x}\end{pmatrix}. \qquad (9)$$

Отметим, что корни λ_i $(i=1, 2, \dots, n)$ характеристического уравнения (7) являются собственными числами, а система векторов (8) — собственными векторами матрицы A. Действительно, рассмотрим вектор $\vec{\alpha}$ с компонентами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Тогда систему (6) можно записать в векторно-матричной форме следующим образом: $(A-\lambda E)\vec{\alpha}=\vec{0}$, где E — единичная матрица размера $n\times n$. Поэтому $A\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}$. Это и означает, что λ — собственное число, а $\vec{\alpha}$ — собственный вектор матрицы A.

Покажем, что система (9) вектор-функций $\vec{y}_1(x), \vec{y}_2(x), \dots, \vec{y}_n(x)$ является фундаментальной. Составим вронскиан из этих вектор-функций и общие множители $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$ вынесем за знак определителя:

$$W(x)=e^{(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)x}\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}\end{vmatrix}. \qquad (10)$$

Первый сомножитель в соотношении (10) всегда положителен, а второй сомножитель — определитель $|\alpha_{ij}|$ также не обращается в нуль (поскольку он составлен из собственных векторов матрицы A, которые линейно независимы; см. п. 2^0 § 4.3*). Следовательно, $W(x)\neq 0$, т. е. система вектор-функций (9) является фундаментальной.

Таким образом, для получения общего решения системы (1) следует подставить совокупность вектор-функций (9) в формулу (3).

Примеры. 1. Найти общее решение системы (а) (см. с. 193).

Р е ш е н и е. Запишем матрицу A коэффициентов системы и составим характеристическое уравнение:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix};\quad \begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ 3 & 4-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Найдем собственные числа и собственные векторы матрицы A. Характеристическое уравнение $\lambda^2-6\lambda+5=0$ имеет простые корни $\lambda_1=1$, $\lambda_2=5$. Для нахождения собственных векторов матрицы A составим систему вида (6):

$$\begin{cases}(2-\lambda)\alpha_1+\alpha_2=0,\\ 3\alpha_1+(4-\lambda)\alpha_2=0.\end{cases} \qquad (*)$$

Подставляя в уравнения (*) $\lambda_1=1$, получим систему $\alpha_{11}+\alpha_{21}=0$, $3\alpha_{11}+3\alpha_{21}=0$ (второй индекс у неизвестных означает, что вычисляются компоненты первого собственного вектора). Одно из этих уравнений есть следствие другого (например, второе уравнение можно получить умножением первого на 3). Поэтому его можно исключить и оставить лишь независимые уравнения (в данном случае одно уравнение, например первое). Отсюда $\alpha_{21}=-\alpha_{11}$ и собственный вектор имеет вид $\vec{\alpha}_1^*=\begin{pmatrix}\alpha_{11}\\ -\alpha_{11}\end{pmatrix}$, где α_{11} — произвольное число. Положим для простоты $\alpha_{11}=1$; тогда $\vec{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$. Подставляя $\lambda_2=5$ в уравнения (*), получим $-3\alpha_{12}+\alpha_{22}=0$, $3\alpha_{12}-\alpha_{22}=0$ (второй индекс у неизвестных означает, что вычисляются компоненты второго собственного вектора). Отсюда $\alpha_{22}=3\alpha_{12}$, т. е. $\vec{\alpha}_2^*=\begin{pmatrix}\alpha_{12}\\ 3\alpha_{12}\end{pmatrix}$. Полагая $\alpha_{12}=1$, находим $\vec{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$. Зная собственные векторы $\vec{\alpha}_1$ и $\vec{\alpha}_2$, запишем фундаментальную систему решений в виде (9):

$$\vec{y}_1(x)=\begin{pmatrix}e^x\\ -e^x\end{pmatrix},\quad \vec{y}_2(x)=\begin{pmatrix}e^{5x}\\ 3e^{5x}\end{pmatrix}.$$

По формуле (3) находим $\vec{y}(x)=C_1\vec{y}_1(x)+C_2\vec{y}_2(x)$, или в координатной форме $y_1=C_1e^x+C_2e^{5x}$, $y_2=-C_1e^x+3C_2e^{5x}$.

2. Найти общее решение системы

$$\frac{dy_1}{dx}=y_2-7y_1,\quad \frac{dy_2}{dx}+2y_1+5y_2=0.$$

Решение. Записав данную систему в виде (1), составим матрицу A и характеристическое уравнение:

$$A=\begin{pmatrix}-7 & 1\\ -2 & -5\end{pmatrix};\quad \begin{vmatrix}-7-\lambda & 1\\ -2 & -5-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

откуда $\lambda^2+12\lambda+37=0$, $\lambda_{1,2}=-6\mp i$, т. е. корни комплексные. Решим систему

$$\begin{cases}(-7-\lambda)\alpha_1+\alpha_2=0,\\ -2\alpha_1+(-5-\lambda)\alpha_2=0.\end{cases}$$

Подставляя $\lambda_1=-6-i$, имеем $(-1+i)\alpha_{11}+\alpha_{21}=0$ (второе уравнение исключаем), т. е. $\alpha_{21}=(1-i)\alpha_{11}$. Подставляя $\lambda_2=-6+i$, находим $(-1-i)\alpha_{12}+\alpha_{22}=0$, т. е. $\alpha_{22}=(1+i)\alpha_{12}$. Собственные векторы таковы:

$$\vec{\alpha}_1^*=\begin{pmatrix}\alpha_{11}\\ (1-i)\alpha_{11}\end{pmatrix},\quad \vec{\alpha}_2^*=\begin{pmatrix}\alpha_{12}\\ (1+i)\alpha_{12}\end{pmatrix},\ \text{или}\ \vec{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\ 1-i\end{pmatrix},\quad \vec{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\ 1+i\end{pmatrix}.$$

Фундаментальная система решений имеет вид

$$\vec{y}_1(x)=\begin{pmatrix} e^{(-6-i)x} \\ (1-i)e^{(-6-i)x} \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_2(x)=\begin{pmatrix} e^{(-6+i)x} \\ (1+i)e^{(-6+i)x} \end{pmatrix}.$$

Запишем общее решение в координатной форме:

$$\begin{aligned} y_1&= C_1 e^{(-6-i)x}+C_2 e^{(-6+i)x}, \\ y_2&=(1-i)C_1 e^{(-6-i)x}+(1+i)C_2 e^{(-6+i)x}. \end{aligned}$$

Преобразуем полученное решение по формулам Эйлера. Учитывая, что $e^{(-6\mp i)x}=e^{-6x}(\cos x\mp i\sin x)$, находим

$$\begin{aligned} y_1&=e^{-6x}[(C_1+C_2)\cos x+i(-C_1+C_2)\sin x], \\ y_2&=e^{-6x}[(C_1+C_2+i(-C_1+C_2))\cos x+(-(C_1+C_2)+ \\ &\quad +i(-C_1+C_2))\sin x]. \end{aligned}$$

Обозначая $C_1+C_2=K_1$ и $i(-C_1+C_2)=K_2$, окончательно получим

$$\begin{aligned} y_1&=e^{-6x}[K_1\cos x+K_2\sin x], \\ y_2&=e^{-6x}[(K_1+K_2)\cos x+(K_2-K_1)\sin x]. \end{aligned}$$

3. Найти общее решение системы (6) (см. с. 193).

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 4 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix}=0, \text{ или } (1-\lambda)(\lambda^2-7\lambda+10)=0.$$

Значит, $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=5$. Система уравнений для нахождения координат собственных векторов имеет вид

$$\begin{cases} (3-\lambda)\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=0, \\ \alpha_1+(1-\lambda)\alpha_2+\alpha_3=0, \\ 4\alpha_1-\alpha_2+(4-\lambda)\alpha_3=0. \end{cases}$$

Подставляя $\lambda_1=1$, получим два независимых уравнения $2\alpha_{11}-\alpha_{21}+\alpha_{31}=0$, $\alpha_{11}+\alpha_{31}=0$, откуда $\alpha_{21}=\alpha_{11}$, $\alpha_{31}=-\alpha_{11}$. Далее, подставляя $\lambda_2=2$, находим $\alpha_{22}=-2\alpha_{12}$, $\alpha_{32}=-3\alpha_{12}$; наконец, подставляя $\lambda_3=5$, имеем $\alpha_{23}=\alpha_{13}$, $\alpha_{33}=3\alpha_{13}$. Положим $\alpha_{11}=\alpha_{12}=\alpha_{13}=1$ и запишем собственные векторы

$$\vec{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\alpha}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{\alpha}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

а также фундаментальную систему решений

$$\vec{u}_1(t)=\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ -e^t \end{pmatrix},\ \vec{u}_2(t)=\begin{pmatrix} e^{2t} \\ -2e^{2t} \\ -3e^{2t} \end{pmatrix},\ \vec{u}_3(t)=\begin{pmatrix} e^{5t} \\ e^{5t} \\ 3e^{5t} \end{pmatrix}.$$

Общее решение исходной системы примет вид $x=C_1e^t+C_2e^{2t}+$ $+C_3e^{5t}$, $y=C_1e^t-2C_2e^{2t}+C_3e^{5t}$, $z=-C_1e^t-3C_2e^{2t}+3C_3e^{5t}$.

4. Найти решение задачи Коши для системы $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx}=-5y_1+2y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx}=y_1-6y_2 \end{cases}$

с начальным условием $\vec{y}_0=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ при $x_0=0$.

Решение. Находим общее решение системы $y_1=C_1e^{-4x}+$ $+C_2e^{-7x}$, $y_2=0{,}5C_1e^{-4x}-C_2e^{-7x}$. Подставив в общее решение начальные условия $x_0=0$, $y_1(x_0)=1$, $y_2(x_0)=5$, получим $1=C_1+C_2$, $5=0{,}5C_1-C_2$ или $C_1=4$, $C_2=-3$. Следовательно, решение задачи Коши имеет вид $y_1=4e^{-4x}-3e^{-7x}$, $y_2=2e^{-4x}+3e^{-7x}$.

Задачу Коши для системы (2) можно решить матричным способом. Пусть $\vec{y}_1(x), \ldots, \vec{y}_n(x)$ — фундаментальная система решений для системы (2). Матрица $Y(x)$, составленная из компонент этих решений [см. равенство (4)], называется *фундаментальной* и, как легко проверить непосредственной подстановкой, удовлетворяет матричному уравнению

$$Y'(x)=AY(x). \tag{11}$$

Обозначим матрицу-столбец постоянных через $\vec{C}$. Тогда, в силу формулы (3), общее решение $\vec{y}(x)$ системы (2) можно записать в виде $\vec{y}(x)=Y(x)\vec{C}$ (проверьте). Для решения задачи Коши с начальным условием $\vec{y}(x_0)=\vec{y}_0$ необходимо определить $\vec{C}$. Подставляя в общее решение $x=x_0$, $\vec{y}(x_0)=\vec{y}_0$, получим $\vec{y}_0=Y(x_0)\vec{C}$. Умножая обе части последнего соотношения на обратную матрицу $Y^{-1}(x_0)$ слева, найдем $\vec{C}=Y^{-1}(x_0)\vec{y}_0$. Значит, решение, удовлетворяющее заданному начальному условию, имеет вид

$$\vec{y}(x)=Y(x)Y^{-1}(x_0)\vec{y}_0. \tag{12}$$

Пример 5. Решить матричным способом задачу Коши для системы из примера 4.

Решение. Составим характеристическое уравнение $\lambda^2+11\lambda+$ $+28=0$, откуда $\lambda_1=-4$, $\lambda_2=-7$. Найдем собственные векторы матрицы A:

$$\vec{\alpha}_1^*=\begin{pmatrix}\alpha_{11}\\0{,}5\alpha_{11}\end{pmatrix},\ \vec{\alpha}_2^*=\begin{pmatrix}\alpha_{12}\\-\alpha_{12}\end{pmatrix} \text{ или } \vec{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0{,}5\end{pmatrix},\ \vec{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

Фундаментальная система решений имеет вид $\vec{y}_1(x)=\begin{pmatrix} e^{-4x} \\ 0,5e^{-4x}\end{pmatrix}$, $\vec{y}_2(x)=\begin{pmatrix} e^{-7x} \\ -e^{-7x}\end{pmatrix}$. Теперь легко записать фундаментальную матрицу $Y(x)$ и общее решение $\vec{y}(x)=Y(x)\vec{C}$:

$$Y(x)=\begin{pmatrix} e^{-4x} & e^{-7x} \\ 0,5e^{-4x} & -e^{-7x}\end{pmatrix},\quad \vec{y}(x)=\begin{pmatrix} e^{-4x} & e^{-7x} \\ 0,5e^{-4x} & -e^{-7x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2\end{pmatrix}.$$

Рекомендуем убедиться в том, что полученная фундаментальная матрица $Y(x)$ удовлетворяет уравнению (11), а также перемножить в последнем соотношении для $\vec{y}(x)$ две матрицы и сравнить полученное выражение с общим решением из примера 4.

Для нахождения частного решения воспользуемся формулой (12). Запишем матрицу $Y(x_0)$, подставив в матрицу $Y(x)$ значение $x=x_0=0$, и найдем обратную матрицу $Y^{-1}(x_0)$:

$$Y(x_0)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0,5 & -1\end{pmatrix},\quad Y^{-1}(x_0)=\begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3\end{pmatrix}.$$

Следовательно, решение задачи Коши в матричной форме имеет вид

$$\vec{y}(x)=\begin{pmatrix} e^{-4x} & e^{-7x} \\ 0,5e^{-4x} & -e^{-7x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 5\end{pmatrix}.$$

Умножая две последних матрицы, получаем искомое частное решение

$$\vec{y}(x)=\begin{pmatrix} e^{-4x} & e^{-7x} \\ 0,5e^{-4x} & -e^{-7x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -3\end{pmatrix}.$$

Рекомендуем перемножить эти матрицы и сравнить результат с ответом примера 4.

4°. Упражнения

1. Является ли система вектор-функций $\vec{y}_1(x)=\begin{pmatrix} e^{x} \\ e^{x}\end{pmatrix}$, $\vec{y}_2(x)=\begin{pmatrix} e^{2x} \\ 2e^{2x}\end{pmatrix}$ фундаментальной?

2. Являются ли линейно зависимыми системы вектор-функций:

а) $\vec{y}_1(t)=\begin{pmatrix} 1 \\ 2\end{pmatrix}$, $\vec{y}_2(t)=\begin{pmatrix} t \\ t^2\end{pmatrix}$; б) $\vec{y}_1(x)=\begin{pmatrix} e^{x} \\ e^{x}\end{pmatrix}$, $\vec{y}_2(x)=\begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{2x}\end{pmatrix}$?

Найдите общие решения систем:

3. $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = -5y_1 + 2y_2, \\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = y_1 - 6y_2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x - 3y, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3x + y. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = y_1 - y_2 + y_3, \\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = y_1 + y_2 - y_3, \\ \dfrac{\mathrm{d}y_3}{\mathrm{d}x} = 2y_1 - y_2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x - 2y - z, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -x + y + z, \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = x - z. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + z = 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + 4y = 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + y - z = 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - z = 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + x - z = 0. \end{cases}$

9. Найдите решение задачи Коши для системы из упр. 4 с начальным условием $\vec{u}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ при $t_0 = 0$.

Решите задачи Коши матричным способом:

10. $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = y_1 - 2y_2, \\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = y_1 - y_2, \end{cases}$

$\vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ x_0 \quad .$

11. $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = y_3 + y_2 - y_1, \\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = y_3 + y_1 - y_2, \\ \dfrac{\mathrm{d}y_3}{\mathrm{d}x} = y_1 + y_2 + y_3, \end{cases}$

$\vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ x_0 = 0.$

§ 4.3*. Структура общего решения линейной нормальной однородной системы с постоянными коэффициентами. Линейная независимость собственных векторов квадратной матрицы

1°. Доказательство второй части теоремы из § 4.2. Рассмотрим линейную систему с постоянными коэффициентами

$$\vec{y}\,'(x) = A\vec{y}(x), \tag{1}$$

где $\vec{y}(x)$ — n-мерная вектор-функция, A — постоянная матрица размера $n\times n$. Покажем, что формула

$$\vec{y}(x)=C_1\vec{y}_1(x)+C_2\vec{y}_2(x)+\ldots+C_n\vec{y}_n(x), \tag{2}$$

где $\vec{y}_1(x),\ \vec{y}_2(x),\ldots,\vec{y}_n(x)$ — фундаментальная система решений для системы (1) и $C_1,\ C_2,\ldots,C_n$ — произвольные постоянные, дает решение задачи Коши для системы (1) с начальным условием $\vec{y}(x_0)=\vec{y}_0$; здесь $\vec{y}_0=\begin{pmatrix} y_{10}\\ \vdots \\ y_{n0}\end{pmatrix}$ — произвольный фиксированный начальный вектор. В дальнейшем понадобится следующее утверждение.

Лемма 1. *Если для любого допустимого x_0 система начальных векторов $\vec{y}_1(x_0),\ \vec{y}_2(x_0),\ldots,\vec{y}_n(x_0)$ линейно зависима, то соответствующая ей совокупность решений $\vec{y}_1(x),\ \vec{y}_2(x),\ldots,\vec{y}_n(x)$ системы (1) также линейно зависима.*

Доказательство. Поскольку система начальных векторов линейно зависима, существуют такие постоянные $\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots,\alpha_n$, не все равные нулю, что

$$\alpha_1\vec{y}_1(x_0)+\alpha_2\vec{y}_2(x_0)+\ldots+\alpha_n\vec{y}_n(x_0)=\vec{0}. \tag{3}$$

Составим из решений $\vec{y}_1(x),\ \vec{y}_2(x),\ldots,\vec{y}_n(x)$ системы (1) линейную комбинацию вида

$$\vec{y}(x)=\alpha_1\vec{y}_1(x)+\alpha_2\vec{y}_2(x)+\ldots+\alpha_n\vec{y}_n(x), \tag{4}$$

в которой коэффициенты α_i те же, что и в соотношении (3). Из первой части доказательства теоремы § 4.2 вытекает, что вектор-функция $\vec{y}(x)$, заданная линейной комбинацией (4), является решением системы (1), причем $\vec{y}(x_0)=\vec{0}$, так как при подстановке в (4) $x=x_0$ правая часть соотношения (4) эквивалентна левой части соотношения (3). Система (1) удовлетворяет теореме существования и единственности решений; поэтому $\vec{y}(x)\equiv\vec{0}$. Действительно, если предположить, что $\vec{y}(x)\not\equiv\vec{0}$, то одному начальному условию $\vec{y}(x_0)=\vec{0}$ будут удовлетворять сразу два решения: $\vec{y}(x)$ и нулевое решение. Итак, $\vec{y}(x)\equiv\vec{0}$, т. е. соотношение (4) примет вид

$$\alpha_1\vec{y}_1(x)+\alpha_2\vec{y}_2(x)+\ldots+\alpha_n\vec{y}_n(x)\equiv\vec{0}, \tag{5}$$

где постоянные $\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots,\alpha_n$ не обращаются в нуль одновременно, а это и означает, что совокупность решений $\vec{y}_1(x),\ \vec{y}_2(x),\ldots,\vec{y}_n(x)$ линейно зависима.

Докажем теперь вторую часть теоремы § 4.2. Нам надо показать, что для любого начального вектора $\vec{y}_0$ рассматриваемой задачи Коши всегда можно определить значения постоянных $C_1,\ C_2,\ldots,C_n$ в соотношении (2) и притом единственным образом. Подставив в (2) начальное условие $\vec{y}(x_0)=\vec{y}_0$, получим систему

$$C_1\vec{y}_1(x_0)+C_2\vec{y}_2(x_0)+\ldots+C_n\vec{y}_n(x_0)=\vec{y}_0,$$

которая в координатной форме имеет вид

$$C_1y_{i1}(x_0)+C_2y_{i2}(x_0)+\ldots+C_ny_{in}(x_0)=y_{i0},\quad i=1,\ 2,\ldots,n. \tag{6}$$

Чтобы система (6) имела единственное решение, необходимо, чтобы определитель, составленный из компонент векторов $\vec{y}_1(x_0), \vec{y}_2(x_0), \ldots, \vec{y}_n(x_0)$, был отличен от нуля. Система вектор-функций $\vec{y}_1(x), \vec{y}_2(x), \ldots, \vec{y}_n(x)$ фундаментальна, т. е. линейно независима. Тогда в силу леммы 1 линейно независимы и векторы $\vec{y}_1(x_0), \vec{y}_2(x_0), \ldots, \vec{y}_n(x_0)$. Следовательно, определитель системы отличен от нуля и постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$ из системы (6) могут быть найдены однозначно. Пусть $C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*$ — решение системы (6); тогда частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию, примет вид

$$\vec{y}(x) = C_1^*\vec{y}_1(x) + C_2^*\vec{y}_2(x) + \ldots + C_n^*\vec{y}_n(x),$$

чем и завершается доказательство.

2°. Линейная независимость собственных векторов квадратной матрицы. Пусть матрица $A = (a_{ij})$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ имеет n различных собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, которым соответствуют собственные векторы

$$\vec{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix}, \ \vec{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \vdots \\ \alpha_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \vec{\alpha}_n = \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Покажем, что векторы $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n$ линейно независимы и, значит, определитель, составленный из компонент этих векторов, не обращается в нуль.

Лемма 2. *Собственные векторы, соответствующие попарно различным собственным числам, линейно независимы.*

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — различные собственные числа матрицы A. Тогда справедливы соотношения

$$A\vec{\alpha}_1 = \lambda_1\vec{\alpha}_1, \ A\vec{\alpha}_2 = \lambda_2\vec{\alpha}_2, \ldots, A\vec{\alpha}_n = \lambda_n\vec{\alpha}_n. \tag{7}$$

Допустим, что собственные векторы $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n$ линейно зависимы, т. е. существуют не равные одновременно нулю постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$ такие, что

$$C_1\vec{\alpha}_1 + C_2\vec{\alpha}_2 + \ldots + C_n\vec{\alpha}_n = \vec{0}. \tag{8}$$

Умножая обе части соотношения (8) на матрицу A слева и используя равенства (7), получим

$$C_1\lambda_1\vec{\alpha}_1 + C_2\lambda_2\vec{\alpha}_2 + \ldots + C_n\lambda_n\vec{\alpha}_n = \vec{0}. \tag{9}$$

Умножая равенство (8) на λ_1 и почленно вычитая результат из (9), имеем

$$C_2(\lambda_2 - \lambda_1)\vec{\alpha}_2 + \ldots + C_n(\lambda_n - \lambda_1)\vec{\alpha}_n = \vec{0}. \tag{10}$$

Выражение (10) аналогично (8) и отличается от него отсутствием первого члена и наличием у всех последующих членов множителя вида $\lambda_i - \lambda_1$. Повторим произведенные преобразования по отношению к равенству (10). Умножая его на A, получим

$$C_2(\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_2\vec{\alpha}_2 + C_3(\lambda_3 - \lambda_1)\lambda_3\vec{\alpha}_3 + \ldots + C_n(\lambda_n - \lambda_1)\lambda_n\vec{\alpha}_n = \vec{0}. \tag{11}$$

Умножая равенство (10) на λ_2 и почленно вычитая результат из (11), имеем

$$C_3(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)\vec{\alpha}_3 + \ldots + C_n(\lambda_n - \lambda_1)(\lambda_n - \lambda_2)\vec{\alpha}_n = \vec{0}. \tag{12}$$

Продолжая аналогичные преобразования, после $n-1$ шагов получим

$$C_n(\lambda_n - \lambda_1)(\lambda_n - \lambda_2)\ldots(\lambda_n - \lambda_{n-1})\vec{\alpha}_n = \vec{0}. \tag{13}$$

В соотношении (13) все скобки вида $(\lambda_n-\lambda_i)$ отличны от нуля (так как собственные числа различны) и собственный вектор $\vec{\alpha}_n\neq\vec{0}$ (поскольку представляет интерес ненулевой вектор, удовлетворяющий соотношению $A\vec{\alpha}_n=\lambda_n\vec{\alpha}_n$). Следовательно, $C_n=0$. Ясно, что в равенстве (8) любое из слагаемых можно поставить на последнее место, поэтому $C_n=C_{n-1}=\ldots=C_2=C_1=0$. Получили противоречие. Итак, $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n$ — линейно независимые векторы.

§ 4.4. Нормальные системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Векторно-матричная форма записи. Структура общего решения

1°. Нормальные системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Рассмотрим систему вида

$$y_i'=a_{i1}y_1+a_{i2}y_2+\ldots+a_{in}y_n+f_i(x) \quad (i=1,\ldots,n), \tag{1}$$

где a_{ij} — заданные постоянные; $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — искомые функции аргумента x, по которому производится дифференцирование; $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_n(x)$ — заданные непрерывные функции. Система (1) называется *неоднородной.*

Приведем примеры линейных неоднородных систем:

$$\begin{cases} y_1'=2y_2-5y_1+e^x; \\ y_2'=y_1-6y_2+e^{-2x}; \end{cases} \quad \text{(а)} \qquad \begin{cases} x'=y; \\ y'=x+e^t+e^{-t}. \end{cases} \quad \text{(б)}$$

Векторно-матричная запись системы (1) имеет вид

$$\vec{y}'(x)=A\vec{y}(x)+\vec{f}(x),$$

где

$$A=(a_{ij}),\ \vec{y}(x)=\begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix},\ \vec{f}(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}.$$

Запишем, например, систему (а) в векторно-матричной форме. Обозначим

$$A=\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -6 \end{pmatrix},\ \vec{y}(x)=\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix},\ \vec{f}(x)=\begin{pmatrix} e^x \\ e^{-2x} \end{pmatrix}.$$

Тогда система примет вид $\vec{y}'(x)=A\vec{y}(x)+\vec{f}(x)$.

Запишем теперь систему (б) в векторно-матричной форме. Обозначим

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ \vec{u}(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},\ f(t)=\begin{pmatrix} 0 \\ e^t+e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Тогда система примет вид $\vec{u}'(t)=A\vec{u}(t)+\vec{f}(t)$.

2°. Структура общего решения. **Теорема 1.** *Если $\vec{y}_*(x)$ — решение неоднородной системы* (1), *а $\vec{y}_1(x)$ — решение однородной системы $\vec{y}'(x)=A\vec{y}(x)$, то сумма $\vec{y}_*(x)+\vec{y}_1(x)$ также является решением неоднородной системы* (1).

Доказательство. Так как $\vec{y}_*(x)$ — решение системы (1), то $\vec{y}'_*(x)=A\vec{y}_*(x)+\vec{f}(x)$. Аналогично, $\vec{y}'_1(x)=A\vec{y}_1(x)$. Складывая эти равенства почленно, получим $[\vec{y}_*(x)+\vec{y}_1(x)]'=A[\vec{y}_*(x)+\vec{y}_1(x)]+$ $+\vec{f}(x)$. Отсюда заключаем, что $\vec{y}_*(x)+\vec{y}_1(x)$ есть решение неоднородной системы (1).

Теорема 2. *Общее решение $\vec{Y}(x)$ неоднородной системы* (1) *равно сумме общего решения $\vec{y}(x)$ однородной системы $\vec{y}'(x)=$ $=A\vec{y}(x)$ и частного решения $\vec{y}_*(x)$ неоднородной системы* (1), т. е.

$$\vec{Y}(x)=\vec{y}(x)+\vec{y}_*(x). \tag{2}$$

Доказательство. Согласно теореме 1, сумма (2) является решением системы (1). Докажем, что формула (2) позволяет решить задачу Коши для системы (1) с начальным условием $\vec{y}(x_0)=\vec{y}_0$, где $\vec{y}_0$ — произвольный фиксированный начальный вектор. Запишем решение (2) в развернутом виде:

$$\vec{Y}(x)=C_1\vec{y}_1(x)+C_2\vec{y}_2(x)+\ldots+C_n\vec{y}_n(x)+\vec{y}_*(x), \tag{3}$$

где $\vec{y}_1(x)$, $\vec{y}_2(x),\ldots,\vec{y}_n(x)$ — фундаментальная система решений для однородной системы $\vec{y}'(x)=A\vec{y}(x)$, а C_1, $C_2,\ldots,C_n$ — произвольные постоянные. Подставляя в равенство (3) начальное условие, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно C_1, $C_2,\ldots,C_n$:

$$C_1\vec{y}_1(x_0)+C_2\vec{y}_2(x_0)+\ldots+C_n\vec{y}_n(x_0)=\vec{y}_0-\vec{y}_*(x_0),$$

или в координатной форме

$$C_1y_{i1}(x_0)+C_2y_{i2}(x_0)+\ldots+C_ny_{in}(x_0)=y_{i0}-y_{i*}(x_0),\quad i=1,\ 2,\ldots,\ n. \tag{4}$$

В силу леммы 1 § 4.3* определитель системы (4) отличен от нуля. Следовательно, существует единственное решение C_1^*, $C_2^*,\ldots,C_n^*$ системы (4). Тогда решение задачи Коши имеет вид

$$\vec{Y}(x)=C_1^*\vec{y}_1(x)+C_2^*\vec{y}_2(x)+\ldots+C_n^*\vec{y}_n(x)+\vec{y}_*(x),$$

т. е. $\vec{Y}(x)$ — общее решение системы (1).

Как же найти частное решение $\vec{y}_*(x)$ неоднородной системы (1)? Для этого применяется метод Лагранжа (метод вариации произвольных постоянных). Его сущность состоит в следующем. Частное решение $\vec{y}_*(x)$ системы (1) будем искать в виде

$$\vec{y}_*(x)=C_1(x)\vec{y}_1(x)+C_2(x)\vec{y}_2(x)+\ldots+C_n(x)\vec{y}_n(x), \tag{5}$$

где $\vec{y}_1(x), \vec{y}_2(x), \ldots, \vec{y}_n(x)$ — фундаментальная система решений для однородной системы $\vec{y}'(x)=A\vec{y}(x)$, а $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции, подлежащие определению. Заметим, что формула (5) аналогична формуле (3) § 4.2, задающей общее решение однородной системы, с той лишь разницей, что коэффициенты $C_1, C_2, \ldots, C_n$ уже не являются постоянными. Подставляя решение (5) в систему (1), получим

$$C_1'(x)\vec{y}_1+\ldots+C_n'(x)\vec{y}_n+C_1(x)\vec{y}_1'+\ldots+C_n(x)\vec{y}_n'=$$

$$=AC_1(x)\vec{y}_1+\ldots+AC_n(x)\vec{y}_n+\vec{f}(x).$$

Так как $\vec{y}'_i(x)=A\vec{y}_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, то после приведения подобных членов получим векторное уравнение

$$C_1'(x)\vec{y}_1+\ldots+C_n'(x)\vec{y}_n=\vec{f}(x),$$

которое в координатной форме имеет вид

$$C_1'(x)y_{i1}(x)+\ldots+C_n'(x)y_{in}(x)=f_i(x),\ i=1,\ 2,\ldots,\ n. \tag{6}$$

Система (6) является линейной неоднородной алгебраической системой относительно $C'_1(x), C'_2(x), \ldots, C'_n(x)$. Ее определитель есть определитель Вронского $W(x)$ и, значит, отличен от нуля. Из системы (6) однозначно определяем $C_1^{*\prime}(x), C_2^{*\prime}(x), \ldots, C_n^{*\prime}(x)$. Интегрируя, находим $C_1^*(x), C_2^*(x), \ldots, C_n^*(x)$, откуда $\vec{y}_*(x)=$ $=C_1^*(x)\vec{y}_1(x)+\ldots+C_n^*(x)\vec{y}_n(x)$.

Пример. Найти общее решение системы (а) (см. с. 206).

Решение. Составим соответствующую однородную систему

$$\frac{dy_1}{dx}=2y_2-5y_1,\quad \frac{dy_2}{dx}=y_1-6y_2,$$

общее решение которой имеет вид $y_1=C_1e^{-4x}+C_2e^{-7x}$, $y_2=$ $=\frac{C_1}{2}e^{-4x}-C_2e^{-7x}$. Частное решение неоднородной системы будем искать в виде $y_{1*}=C_1(x)e^{-4x}+C_2(x)e^{-7x}$, $y_{2*}=\frac{C_1(x)}{2}e^{-4x}-$

$-C_2(x)e^{-7x}$. Подставляя эти выражения в исходиую неоднородную систему, получим

$$C_1'(x)e^{-4x}+C_2'(x)e^{-7x}=e^x,\ \frac{C_1'(x)}{2}e^{-4x}-C_2'(x)e^{-7x}=e^{-2x},$$

откуда

$$C_1'(x)=\frac{2}{3}(e^{5x}+e^{2x}),\ C_2'(x)=-\frac{2}{3}e^{5x}+\frac{1}{3}e^{8x}.$$

Интегрируя и полагая произвольные постоянные равными нулю, находим $C_1(x)=\frac{2}{15}e^{5x}+\frac{1}{3}e^{2x}$, $C_2(x)=-\frac{2}{15}e^{5x}+\frac{1}{24}e^{8x}$. Тогда частное решение $\vec{y}_*(x)$ в координатной форме имеет вид $y_{1*}=\frac{7}{40}e^x+\frac{1}{5}e^{-2x}$, $y_{2*}=\frac{1}{40}e^x+\frac{3}{10}e^{-2x}$, а общее решение исходной неоднородной системы — вид

$$y_1(x)=C_1e^{-4x}+C_2e^{-7x}+\frac{7}{40}e^x+\frac{1}{5}e^{-2x},$$

$$y_2(x)=\frac{C_1}{2}e^{-4x}-C_2e^{-7x}+\frac{1}{40}e^x+\frac{3}{10}e^{-2x}.$$

Сравните полученный результат с общим решением системы из примера 2 п. 3° § 4.1.

3°. Упражнения

1. Найдите общее решение системы (6) (см. с. 206).

Решите системы:

2. $\begin{cases} y_1' = y_2 + x, \\ y_2' = y_1 - x. \end{cases}$
3. $\begin{cases} x' = -x + y + e^t, \\ y' = x - y + e^t. \end{cases}$

Глава V

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

§ 5.1. Понятие устойчивости и асимптотической устойчивости по Ляпунову. Устойчивость решения системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Типы точек покоя для системы двух уравнений

Теория устойчивости, основоположниками которой являются великий русский ученый А. М. Ляпунов и великий французский ученый А. Пуанкаре, представляет собой важный раздел прикладной математики. Создателями современной теории устойчивости являются русские ученые Н. Г. Четаев, Е. А. Барбашин, Н. П. Еругин, Н. Н. Красовский.

1°. Понятие устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости по Ляпунову. Рассмотрим задачу Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений

$$\vec{x}' = \vec{f}(t, \vec{x}) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0, \tag{2}$$

где $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — n-мерный вектор; $t \in I = [t_0, +\infty[$ — независимая переменная, по которой производится дифференцирование; $\vec{f}(t, \vec{x}) = (f_1(t, \vec{x}), f_2(t, \vec{x}), \ldots, f_n(t, x))$ — n-мерная вектор-функция.

К о м м е н т а р и и к з а д а ч е К о ш и (1), (2). Для простоты восприятия эту задачу можно сначала трактовать как задачу Коши для скалярного дифференциального уравнения первого порядка вида $x' = f(t, x)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$. С целью упрощения все рисунки п. 1°, если нет специальных оговорок, приводятся для случая $n = 1$.

Так как задача теории устойчивости впервые возникла в механике, то переменную t принято интерпретировать как время, а искомую вектор-функцию $\vec{x}(t)$ — как движение точки в зависимости от времени в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ (рис. 61).

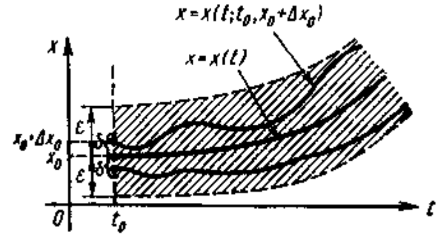


Рис. 61

Пусть задача Коши (1), (2) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности (см. п. 2° § 4.1). Тогда через каждую точку $(t_0, \vec{x}_0)$ области единственности решений проходит только одна интегральная кривая. Если начальные данные $(t_0, \vec{x}_0)$ изменяются, то изменяется и решение. Тот факт, что решение зависит от начальных данных, обозначается следующим образом: $\vec{x}(t)=\vec{x}(t;\ t_0,\ \vec{x}_0)$. Как же изменяется решение $\vec{x}(t;\ t_0,\ \vec{x}_0)$ с изменением начальных данных $(t_0, \vec{x}_0)$? Этот вопрос имеет большое как теоретическое, так и прикладное значение. В самом деле, если математической моделью какого-либо устройства (процесса) является задача Коши (1), (2) и малые изменения начальных данных $(t_0, \vec{x}_0)$ приводят к существенному изменению решения $\vec{x}(t;\ t_0,\ \vec{x}_0)$, то такой моделью нельзя пользоваться, поскольку начальные данные $(t_0, \vec{x}_0)$ получают из опыта, а измерения не могут быть абсолютно точными. Естественно, что в качестве математической модели пригодна лишь та задача Коши, которая устойчива к малым изменениям начальных данных.

Определим понятия устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости в смысле Ляпунова. Для этого отклонение решения $\vec{x}(t)=\vec{x}(t;\ t_0,\ \vec{x}_0)$, вызванное отклонением $\Delta\vec{x}_0$ начального значения $\vec{x}_0$, будем записывать следующим образом: $|\vec{x}(t;\ t_0,\ \vec{x}_0+\Delta\vec{x}_0)-\vec{x}(t)|=|\vec{x}(t;\ t_0,\ \vec{x}_0+\Delta\vec{x}_0)-\vec{x}(t;\ t_0,\ \vec{x}_0)|$.

Определение 1. Решение $\vec{x}(t)=\vec{x}(t;\ t_0,\ \vec{x}_0)$ системы (1) называется *устойчивым по Ляпунову в положительном направлении* (или *устойчивым*), если оно непрерывно по $\vec{x}_0$ на интервале $I=[t_0, +\infty[$, т. е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ такое, что $\forall\Delta\vec{x}_0$

$$|\Delta\vec{x}_0|\leqslant\delta\Rightarrow|\vec{x}(t;\ t_0,\ \vec{x}_0+\Delta\vec{x}_0)-\vec{x}(t)|\leqslant\varepsilon\quad\forall t\geqslant t_0.$$

Если, кроме того, отклонение решения $\vec{x}(t)$ стремится к нулю при $t\to+\infty$ для достаточно малых $\Delta\vec{x}_0$, т. е. $\exists\Delta>0\ \forall\Delta\vec{x}_0$

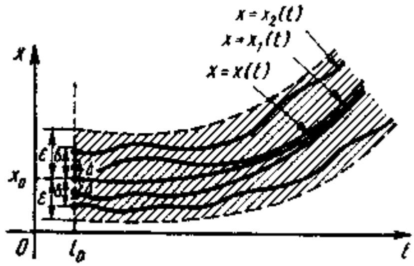


Рис. 62

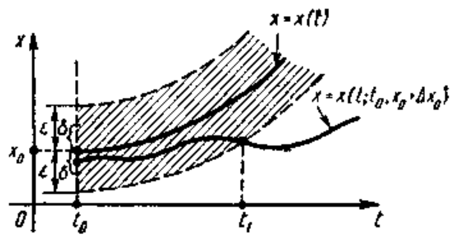


Рис. 63

$$|\Delta\vec{x}_0| \leqslant \Delta \Rightarrow |\vec{x}(t;\ t_0,\ \vec{x}_0+\Delta\vec{x}_0)-\vec{x}(t)| \to 0,\ t\to+\infty, \qquad (3)$$

то решение $\vec{x}(t)$ системы (1) называется *асимптотически устойчивым в положительном направлении* (или *асимптотически устойчивым*).

Аналогично определяются различные типы устойчивости решения в отрицательном направлении.

Комментарии к определению 1. 1) Геометрически устойчивость по Ляпунову решения $\vec{x}(t)$ можно интерпретировать следующим образом (рис. 61): все решения $\vec{x}(t;\ t_0,\ \vec{x}_0+\Delta\vec{x}_0)$, близкие в начальный момент t_0 к решению $\vec{x}(t)$ (т. е. начинающиеся в пределах δ-трубки), не выходят за пределы ε-трубки при всех значениях $t\geqslant t_0$.

2) Асимптотическая устойчивость есть устойчивость с дополнительным условием (3): любое решение $\vec{x}_1(t)$, начинающееся в момент t_0 в Δ-трубке, с течением времени неограниченно приближается к решению $\vec{x}(t)$ (рис. 62). Трубка радиуса Δ называется *областью притяжения* решения $\vec{x}(t)$. Решение $\vec{x}_2(t)$, начинающееся при $t=t_0$ за пределами области притяжения, но в пределах δ-трубки, не покидает ε-трубку, хотя может и не приближаться к решению $\vec{x}(t)$.

Определение 2. Решение $\vec{x}(t)=\vec{x}(t;\ t_0,\ \vec{x}_0)$ системы (1) называется *неустойчивым по Ляпунову в положительном направлении* (или *неустойчивым*), если оно не является устойчивым в положительном направлении.

Аналогично определяется неустойчивость в отрицательном направлении.

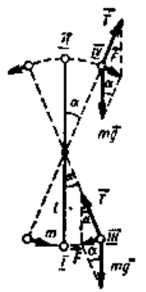


Рис. 64

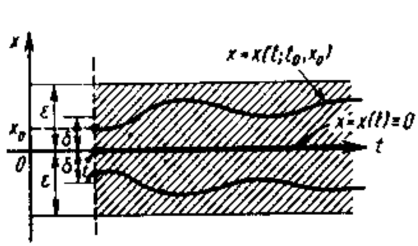


Рис. 65

Комментарий к определению 2. Геометрически неустойчивость по Ляпунову означает, что среди решений, близких в начальный момент t_0 к решению $\vec{x}(t)$, найдется хотя бы одно, которое в некоторый момент t_1 (свой для каждого такого решения) выйдет за пределы ε-трубки (рис. 63).

Приведем примеры из механики, иллюстрирующие определения различных типов устойчивости для одномерного случая, т. е. $n=1$.

Рассмотрим маятник, состоящий из точечной массы m, укрепленной на невесомом стержне длиной l (рис. 64). Выведем маятник из состояния I, отклонив стержень на угол α; тогда, как известно из опыта, он будет стремиться занять вновь положение I. Если пренебречь сопротивлением окружающей среды, то маятник будет колебаться возле положения I сколь угодно долго с амплитудой, равной начальному отклонению,— это модель устойчивого положения равновесия. Если же учитывать сопротивление окружающей среды, то амплитуда колебаний маятника будет уменьшаться и в итоге он снова займет положение I — это модель асимптотически устойчивого положения равновесия. Если маятник находится в положении равновесия II, то малейшее его смещение приведет к удалению маятника от состояния II — это модель неустойчивого положения равновесия.

Исследование устойчивости произвольного решения $\vec{x}(t)$ системы (1) всегда можно свести к исследованию устойчивости нулевого решения некоторой преобразованной системы. Действительно, в системе (1) произведем подстановку $\vec{y}(t)=\vec{x}-\vec{x}(t)$. Тогда получим систему

$$\vec{y}'=\vec{F}(t, \vec{y}), \tag{4}$$

где $\vec{F}(t, \vec{y})=\vec{f}(t, \vec{y}(t)+\vec{x}(t))-\vec{f}(t, \vec{x}(t))$, $\vec{F}(t, \vec{0})\equiv\vec{0} \quad \forall t\geqslant t_0$.

Решению $\vec{x}(t)$ системы (1) соответствует нулевое решение $\vec{y}(t)\equiv\vec{0}$ системы (4).

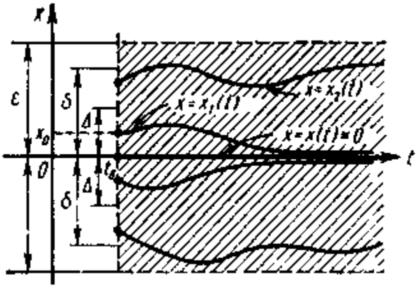


Рис. 66

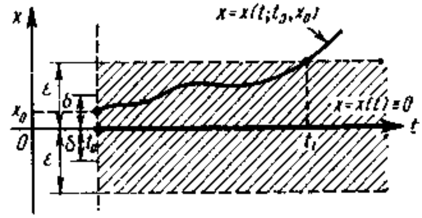


Рис. 67

В дальнейшем будем предполагать, что система (1) имеет нулевое решение, т. е. $\vec{f}(t, \vec{0})=\vec{0}$ $\forall t\geqslant t_0$, и ограничимся исследованием устойчивости нулевого решения. Переформулируем определения различных типов устойчивости для нулевого решения $\vec{x}(t)\equiv\vec{0}$ системы (1).

Определение 3. Нулевое решение $\vec{x}(t)\equiv\vec{0}$ системы (1) называется *устойчивым по Ляпунову в положительном направлении* (или *устойчивым*), если $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что $\forall\vec{x}_0$

$$|\vec{x}_0|\leqslant\delta\Rightarrow|\vec{x}(t;\ t_0,\ \vec{x}_0)|\leqslant\varepsilon \quad \forall t\geqslant t_0.$$

Если кроме того,

$$\exists\Delta>0 \quad \forall\vec{x}_0 \quad |\vec{x}_0|\leqslant\Delta\Rightarrow|\vec{x}(t;\ t_0,\ \vec{x}_0)|\to 0,\ t\to+\infty,$$

то решение $\vec{x}(t)\equiv\vec{0}$ системы (1) называется *асимптотически устойчивым в положительном направлении* (или *асимптотически устойчивым*).

Определение 4. Нулевое решение $\vec{x}(t)\equiv\vec{0}$ системы (1) называется *неустойчивым по Ляпунову в положительном направлении* (или *неустойчивым*), если оно не является устойчивым в положительном направлении, т. е.

$$\exists\varepsilon>0 \quad \exists t_1>t_0 \quad \forall\delta>0 \quad \vec{x}_0\neq\vec{0}\ |\vec{x}_0|\leqslant\delta\Rightarrow|\vec{x}(t_1;\ t_0,\ \vec{x}_0)|>\varepsilon.$$

Геометрическая интерпретация устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения $\vec{x}(t)\equiv\vec{0}$ системы (1) дана соответственно на рис. 65—67.

Приведем примеры исследования устойчивости для случая $n=1$, т. е. для скалярного уравнения (1).

Примеры. 1. Исследовать на устойчивость решение задачи Коши

$$\frac{dx}{dt}=2+t,\ x(0)=1. \tag{*}$$

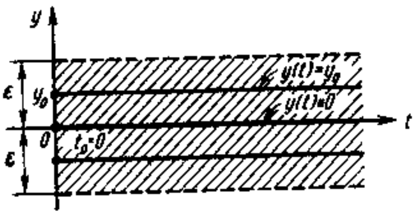


Рис. 68

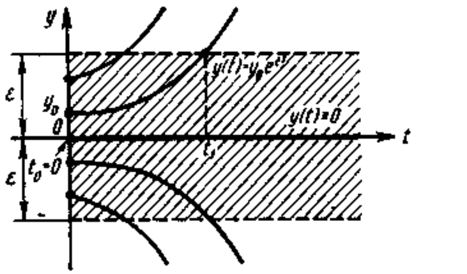


Рис. 69

Решение. Общее решение уравнения (*) имеет вид $x=\frac{t^2}{2}+2t+C$. Решение задачи Коши (*) таково: $x(t)=\frac{t^2}{2}+2t+1$. Известно, что решение $\vec{x}(t)$ уравнения (1) обладает тем же типом устойчивости, что и нулевое решение уравнения (4). Произведем замену переменной $y(t)=x-x(t)$. Отсюда $x=y(t)+x(t)=y(t)+\frac{t^2}{2}+2t+1$. Подставляя полученное выражение в данное уравнение, имеем $y'+t+2=2+t$, или $y'=0$. Последнее уравнение имеет общее решение $y(t)=C$. Начальным условиям вида $y(0)=0$ соответствует нулевое решение $y(t)\equiv 0$. Любым другим начальным условиям $y(0)=y_0$ соответствует решение $y(t)=y_0$ (рис. 68). Очевидно, что $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$, например $\delta=\varepsilon$, такое, что $|y_0|<\delta\Rightarrow|y(t)|<\varepsilon\ \forall t\geqslant 0$. Следовательно, нулевое решение $y(t)\equiv 0$ устойчиво, а, значит, устойчиво и решение $x(t)=\frac{t^2}{2}+2t+1$ задачи Коши (*).

2. Исследовать на устойчивость решение задачи Коши

$$\frac{dx}{dt}=2t(x+1),\ x(0)=0.$$

Решение. Общее решение данного уравнения имеет вид $x=Ce^{t^2}-1$. Соответствующее частное решение есть $x(t)=e^{t^2}-1$. С помощью замены $x=y(t)+e^{t^2}-1$ исходное уравнение приводится к уравнению $y'=2ty$ с общим решением $y(t)=Ce^{t^2}$. Начальным условиям $y(0)=0$ соответствует нулевое решение $y(t)\equiv 0$, а начальным условиям $y(0)=y_0$ — решение $y(t)=y_0e^{t^2}$ (рис. 69). Нулевое решение $y(t)\equiv 0$ неустойчиво, а, значит, неустойчиво и решение $x(t)=e^{t^2}-1$ данной задачи Коши.

3. Исследовать на устойчивость решение задачи Коши

$$\frac{dx}{dt}=-x+t^2,\ x(1)=1.$$

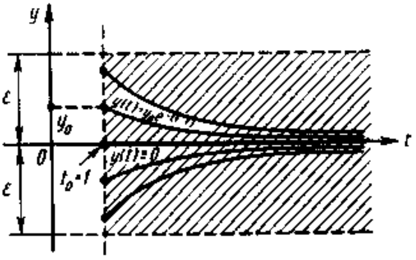


Рис. 70

Решение. Общее решение исходного уравнения имеет вид $x=Ce^{-t}+t^2-2t+2$. Решение задачи Коши есть $x(t)=t^2-2t+2$. Подстановкой $x=y(t)+t^2-2t+2$ приводим данное уравнение к виду $y'=-y$, общее решение которого $y(t)=Ce^{-t}$. Начальным условиям $y(1)=0$ соответствует нулевое решение $y(t)\equiv 0$, а начальным условиям $y(1)=y_0$ — решение $y(t)=y_0e^{-(t-1)}$ (рис. 70). Ясно, что нулевое решение устойчиво. Находим

$$\lim_{t\to\infty}|y(t)|=\lim_{t\to\infty}|y_0|\,e^{-(t-1)}=\lim_{t\to\infty}\frac{|y_0|}{e^{t-1}}=0.$$

Следовательно, нулевое решение $y(t)\equiv 0$ асимптотически устойчиво, а, значит, асимптотически устойчиво и решение $x(t)=t^2-2t+2$ данной задачи Коши.

2°. Устойчивость решения автономной системы. Устойчивость решения системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Система обыкновенных дифференциальных уравнений называется *автономной* (или стационарной, или консервативной, или динамической), если независимая переменная не входит явно в систему уравнений.

Нормальную автономную систему n-го порядка можно записать в векторной форме:

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(\vec{x}). \qquad (5)$$

Рассмотрим задачу Коши для системы (5) с начальными условиями (2). В дальнейшем предполагаем, что задача Коши (5), (2) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности (см. § 4.1).

Пусть $\vec{x}=\vec{x}(t)$ — есть решение системы (5). Направленная кривая γ, которую можно параметрически задать в виде $x_i=x_i(t)$ $(i=1,\dots,n)$, называется *траекторией* (фазовым графиком) системы (5) или траекторией решения $\vec{x}=\vec{x}(t)$. Пространство $\mathbb{R}^n$ с координатами $(x_1,\dots,x_n)$, в котором расположены траектории системы (5), называется *фазовым пространством* автономной системы (5). Известно, что интегральные кривые системы (5) можно параметрически задать в виде $t=t$, $x_1=x_1(t),\dots,x_n=x_n(t)$. Следовательно, интегральная кривая принадлежит пространству $\mathbb{R}^{n+1}$ с координатами $(t, x_1, x_2,\dots,x_n)$, а траектория является проекцией интегральной

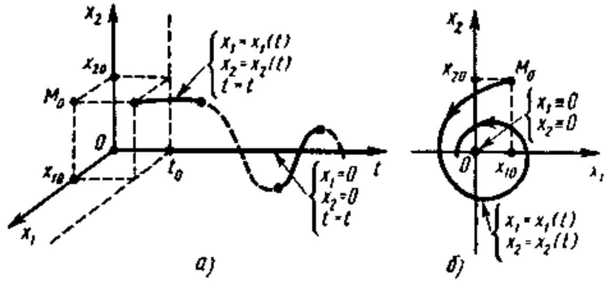


Рис. 71

кривой на пространство $\mathbf{R}^n$ параллельно оси t. Проиллюстрируем это для случая $n=2$, т. е. когда $\mathbf{R}^{n+1}$ — трехмерное пространство, а фазовое пространство $\mathbf{R}^n$ — двумерная плоскость. На рис. 71, *а* изображена интегральная кривая, заданная параметрическими уравнениями $t=t$, $x_1=x_1(t)$, $x_2=x_2(t)$, а на рис. 71, *б* — ее проекция на плоскость, т. е. траектория, заданная параметрическими уравнениями $x_1=x_1(t)$, $x_2=x_2(t)$. Стрелкой указано направление возрастания параметра t.

Определение 5. Точка $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ называется *точкой покоя (положением равновесия)* автономной системы (5), если правые части $f_1, f_2, \ldots, f_n$ системы (5) обращаются в этой точке в нуль, т. е. $\vec{f}(\vec{a})=\vec{0}$, где $\vec{a}=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\vec{0}=(0, 0, \ldots, 0)$.

Если $(a_1, \ldots, a_n)$ — точка покоя, то система (5) имеет постоянное решение $\vec{x}(t)=\vec{a}$. Как известно (см. п. 1°), исследование устойчивости любого, а значит, и постоянного решения $\vec{a}$ можно свести к исследованию устойчивости нулевого решения. Поэтому далее будем считать, что система (5) имеет нулевое решение $\vec{x}(t)\equiv\vec{0}$, т. е. $\vec{f}(\vec{0})=\vec{0}$, и точка покоя совпадает с началом координат фазового пространства $\mathbf{R}^n$. В пространстве $\mathbf{R}^{n+1}$ точке покоя соответствует нулевое решение. Это изображено на рис. 71 для случая $n=2$.

Таким образом, устойчивость нулевого решения системы (5) означает устойчивость начала координат фазового пространства системы (5), и наоборот.

Дадим геометрическую интерпретацию устойчивого, асимптотически устойчивого и неустойчивого начала фазовой плоскости, т. е. когда $n=2$. Для этого следует спроектировать аналоги рис. 65—67 в двумерном случае на фазовую плоскость $\mathbf{R}^2$, причем проекциями ε-трубки и δ-трубки являются окружности с радиусами ε и δ. Начало $\vec{x}=\vec{0}$ устойчиво, если все траектории, начинающиеся в пределах δ-окружности, не покидают ε-окружность $\forall t\geqslant t_0$ (рис. 72); асимптотически устойчиво, если оно устойчиво и все траектории,

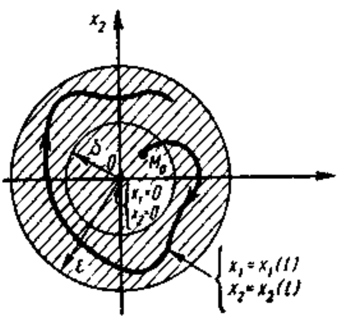


Рис. 72

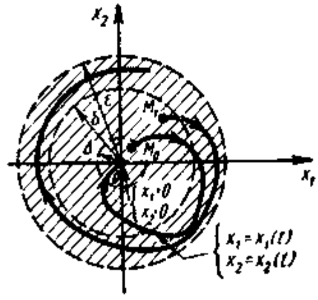


Рис. 73

начинающиеся в области притяжения Δ, стремятся к началу (рис. 73); неустойчиво, если для любой ε-окружности и всех $\delta>0$ существует хотя бы одна траектория, покидающая ее (рис. 74).

Нормальная система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, имеющая вид

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x}, \tag{6}$$

где A — постоянная матрица размера $n\times n$, является частным случаем системы (5). Следовательно, для этой системы справедливы все сделанные выше утверждения об автономных системах.

Примеры. 1. Составить уравнение колебаний маятника, состоящего из массы m, подвешенной на невесомом стержне длиной l (см. рис. 64). Сопротивлением окружающей среды пренебречь; считать, что при малых углах $\sin\alpha\approx\alpha$. Исследовать устойчивость положения I.

Решение. Пусть положение I является началом отсчета смещения маятника x. Если маятник покоится в положении I, то смещение $x=0$ и скорость $\frac{dx}{dt}=x'=0$. Сместим маятник в положение III, которому соответствует начальное смещение $x(0)=A$ и скорость $x'(0)=0$. Если теперь маятник отпустить, то он будет двигаться под действием двух сил: собственного веса $m\vec{g}$ и натяжения стержня $\vec{T}$, равнодействующая которых есть $\vec{F}$. Согласно второму закону Ньютона, $mx''=-F$ (знак минус означает, что действие силы $\vec{F}$ противоположно направлению смещения). Имеем $F=|\vec{F}|=$ $=mg\sin\alpha\approx mg\alpha=mg\ \frac{x}{l}$, откуда $mx''=-m\ \frac{g}{l}\ x$ или $x''=$ $=-\ \frac{g}{l}x$. Обозначая $x_1=x$, $x_2=x'=x'_1$, перейдем от одного

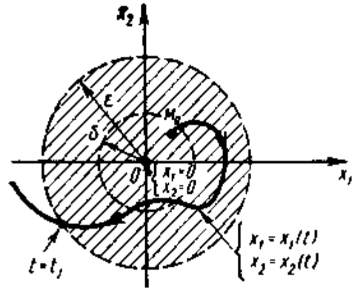


Рис. 74

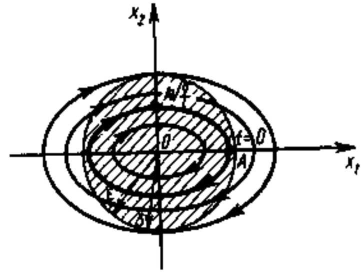


Рис. 75

дифференциального уравнения второго порядка к эквивалентной ему нормальной системе

$$x_1'=x_2,\ x_2'=-\frac{g}{l}x_1. \qquad (*)$$

Общее решение системы (*) имеет вид $x_1(t)=C_1\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t+$ $+C_2\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t;\ x_2(t)=\sqrt{\frac{g}{l}}C_1\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t-\sqrt{\frac{g}{l}}C_2\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t.$

Положению I соответствует нулевое решение $x_1\equiv 0$, $x_2\equiv 0$ автономной системы (*), а положению III — частное решение

$$x_1(t)=A\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t;\ x_2(t)=-A\sqrt{\frac{g}{l}}\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t, \qquad (**)$$

удовлетворяющее начальному условию $x_1(0)=A$, $x_2(0)=0$. Исключая из уравнений (**) параметр t, получим $\frac{x_1^2}{A^2}+\frac{x_2^2}{A^2g/l}=1$. Следовательно, траектория движения маятника из положения III является эллипсом с полуосями A и $A\sqrt{g/l}$ (рис. 75), т. е. маятник периодически отклоняется от положения равновесия I то вправо, то влево (колеблется с амплитудой A). Очевидно, что начало устойчиво, но не асимптотически, так как траектории не стремятся к началу.

2. В примере 1 исследовать устойчивость положения I с учетом сопротивления окружающей среды, которое считать пропорциональным с коэффициентом k скорости смещения.

Решение. Движение маятника в среде с сопротивлением описывается уравнением $mx''=-F-F_c$, где $\vec{F}_c=k\vec{x}'$ — сила сопротивления среды, направленная противоположно смещению. Имеем $x''=-\frac{g}{l}x-\frac{k}{m}x'$. Обозначая $x_1=x$, $x_2=x'$, получим

$$x_1'=x_2,\ x_2'=-\frac{g}{l}x_1-\frac{k}{m}x_2. \qquad (*)$$

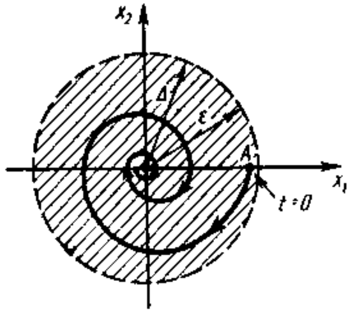


Рис. 76

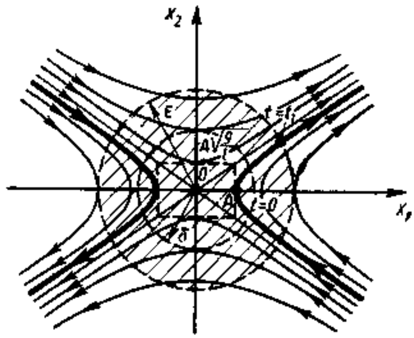


Рис. 77

Корнями характеристического уравнения являются $\lambda_{1,2}=-\frac{k}{2m}\pm$ $\pm\sqrt{-\left(\frac{g}{l}-\frac{k^2}{4m^2}\right)}$. Считая, что $\frac{g}{l}-\frac{k^2}{4m^2}>0$, обозначим $\omega^2=\frac{g}{l}-$ $-\frac{k^2}{4m^2}$ и $\alpha=\frac{k}{2m}$; тогда $\lambda_{1,2}=-\alpha\pm i\omega$. Общее решение системы (*) имеет вид

$$x_1(t)=e^{-\alpha t}\left[C_1\sin\omega t+C_2\cos\omega t\right],$$

$$x_2(t)=e^{-\alpha t}\left[-(\alpha C_1+\omega C_2)\sin\omega t+(\omega C_1-\alpha C_2)\cos\omega t\right].$$

Положению I соответствует нулевое решение $x_1\equiv 0$, $x_2\equiv 0$ системы (*), а положению III — частное решение

$$x_1(t)=A\,e^{-\alpha t}\left(\frac{\alpha}{\omega}\sin\omega t+\cos\omega t\right),\quad x_2(t)=-A\,e^{-\alpha t}\frac{\alpha^2+\omega^2}{\omega}\sin\omega t, \tag{**}$$

удовлетворяющее начальным условиям $x_1(0)=A$, $x_2(0)=0$. Из равенств (**) видно, что амплитуда колебаний $Ae^{-\alpha t}$ убывает с возрастанием t и $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(x_1^2(t)+x_2^2(t)\right)=0$. Следовательно, траектория является спиралью, навивающейся на начало (рис. 76). Начало асимптотически устойчиво.

3. В примере 1 исследовать устойчивость положения II (см. рис. 64).

Решение. Будем отсчитывать смещение x маятника от положения II. Если маятник покоится в положении II, то $x=0$ и $x'=0$. Сместим маятник в положение IV, которому соответствует начальное смещение $x(0)=A$ и скорость $x'(0)=0$. Движение маятника из начального положения IV описывается уравнением $mx''=m\frac{g}{l}\,x$.

Разделив обе части уравнения на постоянный множитель m и обозначив $x_1=x$, $x_2=x'$, получим

$$x_1'=x_2,\quad x_2'=\frac{g}{l}x_1. \tag{*}$$

Общее решение системы (*) имеет вид $x_1(t)=C_1e^{-\sqrt{g/l}\,t}+C_2e^{\sqrt{g/l}\,t}$; $x_2(t)=\sqrt{\frac{g}{l}}\left(-C_1e^{-\sqrt{g/l}\,t}+C_2e^{\sqrt{g/l}\,t}\right)$.

Положению II маятника соответствует начало координат фазовой плоскости $x_1\equiv0$, $x_2\equiv0$, а положению IV — частное решение

$$x_1(t)=\frac{A}{2}\left(e^{-\sqrt{g/l}\,t}+e^{\sqrt{g/l}\,t}\right),\quad x_2(t)=\frac{A}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\left(-e^{-\sqrt{g/l}\,t}+e^{\sqrt{g/l}\,t}\right), \tag{**}$$

удовлетворяющее начальным условиям $x_1(0)=A$, $x_2(0)=0$. Исключая из равенств (**) параметр t, получим $\frac{x_1^2}{A^2}-\frac{x_2^2}{A^2g/l}=1$. Следовательно, траектория является гиперболой с полуосями A и $A\sqrt{g/l}$ (рис. 77). Очевидно, что начало неустойчиво по Ляпунову.

3°. Типы точек покоя для системы двух уравнений. В приведенных выше примерах для исследования устойчивости точки покоя мы находили предварительно общие и частные решения дифференциальных уравнений или систем. Такой подход трудоемок, а часто и невозможен, поскольку не всякую систему дифференциальных уравнений удается решить. Существуют методы, позволяющие делать правильные выводы относительно устойчивости решений без предварительного решения системы. Познакомимся с одним из этих методов на примере линейной однородной системы двух уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=a_{11}x_1+a_{12}x_2,\\[2mm] \dfrac{dx_2}{dt}=a_{21}x_1+a_{22}x_2.\end{cases} \tag{7}$$

Найдем точки покоя нормальной автономной системы (7):

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=0.\end{cases} \tag{8}$$

Однородная система (8) имеет единственное нулевое решение, если $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\neq0$. Пусть это условие выполнено; тогда система (7) имеет единственную точку покоя $x_1=0$, $x_2=0$. Исследуем ее устойчивость. Будем искать решение системы (7) в виде $x_1=$

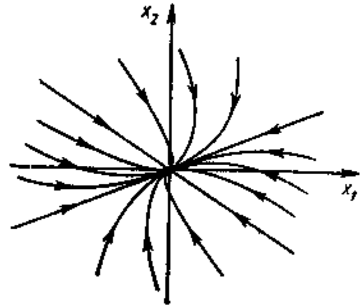


Рис. 78

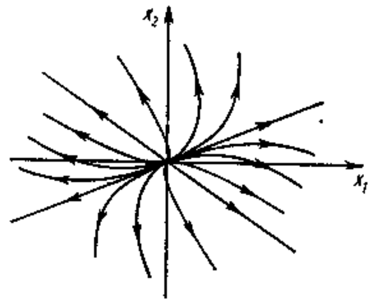


Рис. 79

$=\alpha_1 e^{\lambda x}$, $x_2=\alpha_2 e^{\lambda x}$, где λ, α_1, α_2 — постоянные, подлежащие определению (см. § 4.2). Для нахождения λ получим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0. \tag{9}$$

В зависимости от корней λ_1 и λ_2 характеристического уравнения (9) положение равновесия (0,0) обладает тем или иным типом устойчивости. Возможны следующие случаи.

I. *Корни λ_1 и λ_2 — отличные от нуля, действительные и различные.* В этом случае общее решение системы (7) имеет вид

$$x_1(t)=C_1\alpha_{11}e^{\lambda_1 t}+C_2\alpha_{21}e^{\lambda_2 t};\quad x_2(t)=C_1\alpha_{12}e^{\lambda_1 t}+C_2\alpha_{22}e^{\lambda_2 t}, \tag{10}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

а) $\lambda_1<0$, $\lambda_2<0$. Так как $e^{\lambda t}\to 0$ при $\lambda<0$ и $t\to\infty$, то справедливо предельное соотношение $\lim\limits_{t\to\infty}\left(x_1^2(t)+x_2^2(t)\right)=0$. Кроме того, функция $e^{\lambda t}$ при $\lambda<0$ монотонно убывает с ростом t. Следовательно, траектории представляют собой кривые, примыкающие к началу координат при $t\to\infty$, и начало асимптотически устойчиво. При этом если в равенствах (10) либо $C_1=0$, либо $C_2=0$, то траектории являются лучами, примыкающими к началу. Действительно, пусть $C_1=$ $=0$; тогда $x_1(t)=C_2\alpha_{21}e^{\lambda_2 t}$ и $x_2(t)=C_2\alpha_{22}e^{\lambda_2 t}$. Отсюда $x_1/x_2=\alpha_{21}/\alpha_{22}$, или $x_1=(\alpha_{21}/\alpha_{22})x_2$. Аналогично, при $C_2=0$ получим $x_1=(\alpha_{11}/\alpha_{12})x_2$. Такое положение равновесия называется *устойчивым узлом* (рис. 78).

б) $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$. Так как $e^{\lambda t}\to\infty$ при $\lambda>0$ и $t\to\infty$, то с течением времени траектории удаляются от положений равновесия, и начало неустойчиво. Совокупность фазовых графиков такая же, как и в случае а), но направление возрастания параметра t вдоль траектории является противоположным. Такое положение равновесия называется *неустойчивым узлом* (рис. 79).

в) $\lambda_1\lambda_2<0$, т. е. корни имеют разные знаки. Пусть для определенности $\lambda_1>0$, $\lambda_2<0$. Положим в соотношениях (10) $C_2=0$. Тогда

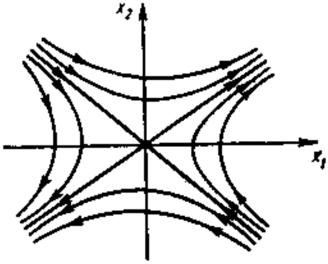


Рис. 80

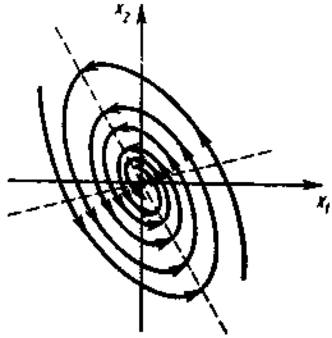


Рис. 81

$x_1(t)=C_1\alpha_{11}e^{\lambda_1 t}$ и $x_2(t)=C_1\alpha_{12}e^{\lambda_1 t}$, откуда $x_1=(\alpha_{11}/\alpha_{12})x_2$. Траектория представляет собой луч, по которому с возрастанием t точка удаляется от начала координат, так как при $\lambda_1>0$ функция $e^{\lambda t}$ монотонно возрастает. Следовательно, положение равновесия неустойчиво. Если $C_1=0$, то получим луч $x_1=(\alpha_{21}/\alpha_{22})x_2$, по которому с возрастанием t точка неограниченно приближается к началу координат, поскольку при $\lambda_2<0$ функция $e^{\lambda_2 t}$ монотонно убывает. Остальные траектории имеют форму гиперболы и направление возрастания параметра t, согласующееся с направлениями лучей. Такое положение равновесия называется *седлом* (рис. 80).

Пример 1. Рассмотрим систему из примера 3, п. 2⁰. Характеристическое уравнение имеет вид $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \frac{g}{l} & -\lambda \end{vmatrix}=0$ или $\lambda^2-\frac{g}{l}=0$. Отсюда $\lambda_1=-\sqrt{\frac{g}{l}}$, $\lambda_2=\sqrt{\frac{g}{l}}$, где $\frac{g}{l}>0$ по смыслу задачи. Таким образом, корни характеристического уравнения действительные и имеют разные знаки. Следовательно, точка покоя неустойчива и представляет собой седло (см. рис. 77).

II. *Корни λ_1 и λ_2 — комплексно-сопряженные*, т. е. $\lambda_1=\alpha+i\beta$, $\lambda_2=\alpha-i\beta$ и $\beta\neq0$. Общее решение системы (7) имеет вид

$$x_1(t)=e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t),$$
$$x_2(t)=\frac{1}{a_{12}}e^{\alpha t}[(\alpha C_1+\beta C_2-a_{11}C_1)\cos\beta t+(\alpha C_2-\beta C_1-a_{11}C_2)\sin\beta t]. \tag{11}$$

Перейдем в равенствах (11) к полярным координатам. Полагая $R=\max(C_1, C_2)$ и $\sigma=\operatorname{arctg}(C_1/C_2)$, получим параметрические уравнения траектории в полярных координатах:

$$r=Re^{\alpha t},\quad \varphi=\beta t+\sigma. \tag{12}$$

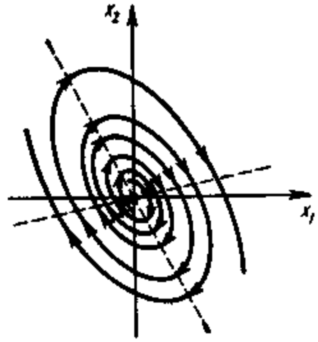


Рис. 82

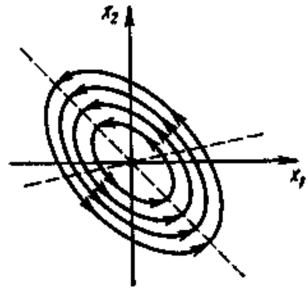


Рис. 83

При $\alpha \neq 0$ каждая траектория является логарифмической спиралью.

а) $\alpha < 0$. Поскольку $e^{\alpha t} \to 0$ при $t \to +\infty$, точка асимптотически приближается по спирали к началу. Положение равновесия асимптотически устойчиво и называется *устойчивым фокусом* (рис. 81).

б) $\alpha > 0$. Поскольку $e^{\alpha t} \to \infty$ при $t \to +\infty$, точка по спирали уходит от начала в бесконечность. Положение равновесия неустойчиво и называется *неустойчивым фокусом* (рис. 82).

в) $\alpha = 0$. Каждая фазовая траектория, кроме положения равновесия, замкнута. Положение равновесия устойчиво и называется *центром* (рис. 83).

Примеры. 2. Рассмотрим систему из примера 1 п. 2°. Характеристическое уравнение имеет вид $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\lambda \end{vmatrix} = 0$ или $\lambda^2 + \frac{g}{l} = 0$. Отсюда $\lambda_1 = i\sqrt{\frac{g}{l}}$, $\lambda_2 = -i\sqrt{\frac{g}{l}}$, где $\frac{g}{l} > 0$. Таким образом, корни являются комплексно сопряженными, причем действительная часть $\alpha = 0$. Следовательно, начало устойчиво и является центром (см. рис. 75).

3. Рассмотрим систему из примера 2 п. 2°. Характеристическое уравнение имеет вид $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{k}{m} - \lambda \end{vmatrix} = 0$ или $\lambda^2 + \frac{k}{m}\lambda + \frac{g}{l} = 0$. Корни $\lambda_1 = -\frac{k}{2m} + i\omega$, $\lambda_2 = -\frac{k}{2m} - i\omega$ $\left(\text{где } \omega^2 = \frac{g}{l} - \frac{k^2}{4m^2}\right)$ — комплексно сопряженные, причем $\alpha = -\frac{k}{2m} < 0$. Следовательно, начало асимптотически устойчиво и является устойчивым фокусом (см. рис. 76).

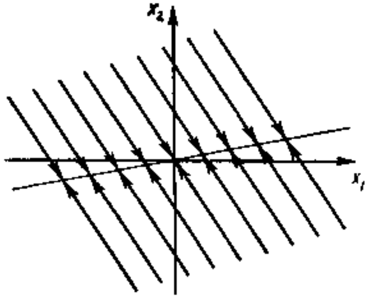


Рис. 84

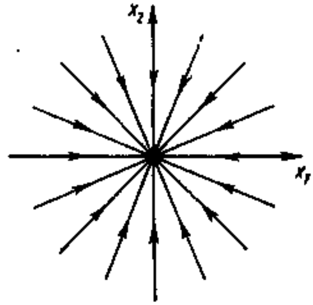


Рис. 85

III. *Вырожденные случаи: корни λ_1 и λ_2 либо равны, либо один из них или оба обращаются в нуль.*

а) $\lambda_1=0$, $\lambda_2<0$. Общее решение системы (7) имеет вид

$$x_1(t)=C_1+C_2 e^{\lambda_2 t};\ x_2(t)=\frac{1}{a_{12}}[-C_1a_{11}+C_2(\lambda_2-a_{11})e^{\lambda_2 t}]. \quad (13)$$

Так как $e^{\lambda_2 t}\to 0$ при $t\to\infty$, то траектории представляют собой прямые, примыкающие к прямой $x_2=-(a_{11}/a_{12})x_1$, все точки которой являются устойчивыми положениями равновесия (рис. 84).

б) $\lambda_1=0$, $\lambda_2>0$. Общее решение системы (7) имеет вид (13). Поскольку $e^{\lambda_2 t}\to\infty$ при $t\to\infty$, точки неограниченно удаляются от прямой $x_2=-(a_{11}/a_{12})x_1$. Положение равновесия неустойчиво. Фазовый портрет такой же, как в случае а), но стрелки на траекториях следует направить в другую сторону.

в) $\lambda_1=\lambda_2<0$. Общее решение системы (7) имеет вид

$$x_1(t)=(C_1+C_2t)e^{\lambda_1 t};\ x_2(t)=\frac{1}{a_{12}}[C_1(\lambda_1-a_{11})+C_2(1+\lambda_1t-a_{11}t)]e^{\lambda_1 t}. \quad (14)$$

Так как $e^{\lambda_1 t}\to 0$ и $t e^{\lambda_1 t}\to 0$ при $t\to\infty$, то $[x^2_1(t)+x^2_2(t)]\to 0$ при $t\to\infty$ и начало асимптотически устойчиво. Траектории являются лучами, примыкающими к началу (рис. 85). Положение равновесия называется *устойчивым вырожденным узлом.*

г) $\lambda_1=\lambda_2>0$. Рассуждения аналогичны случаю в). На рисунке следует изменить направление стрелок на противоположное; получается *неустойчивый вырожденный узел.*

д) $\lambda_1=\lambda_2=0$. Общее решение системы (7) имеет вид

$$x_1(t)=C_1+C_2t,\ x_2(t)=\frac{1}{a_{12}}[-a_{11}C_1+C_2-a_{11}C_2t], \quad (15)$$

откуда $[x^2_1(t)+x_2^2(t)]\to\infty$ при $t\to+\infty$, и решение неустойчиво. Исключая из равенств (15) параметр t, получим $x_1+a_{12}x_2=C_1$. Сле-

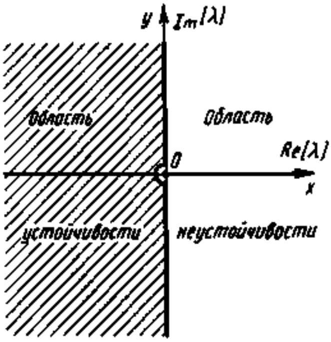


Рис. 86

довательно, траектории являются прямыми, параллельными прямой $x_1+a_{12}x_2=0$. Фазовый портрет называется *вырожденным седлом*.

Проанализируем все рассмотренные случаи. Будем откладывать действительные части корней $\mathrm{Re}[\lambda_1]$ и $\mathrm{Re}[\lambda_2]$ по оси Ox, а мнимые части $\mathrm{Im}[\lambda_1]$ и $\mathrm{Im}[\lambda_2]$ — по оси Oy. Тогда область устойчивости представляет собой левую полуплоскость, точка $(0,0)$ исключается (рис. 86).

Итак, справедливо следующее правило: *если хотя бы один корень характеристического уравнения системы (7) принадлежит правой полуплоскости или оба корня равны нулю, то положение равновесия неустойчиво, в противном случае оно устойчиво.*

Пример 4 Исследовать устойчивость точки покоя систем:

$$1)\ \begin{cases} x_1'=x_1; \\ x_2'=2x_2; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x_1'=0; \\ x_2'=-x_2. \end{cases}$$

Решение. 1) Характеристическое уравнение имеет вид $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0$, или $\lambda^2-3\lambda+2=0$. Его корни $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$ принадлежат правой полуплоскости; следовательно, начало $(0, 0)$ неустойчиво. Это — неустойчивый узел.

2) Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2+\lambda=0$, т. е. $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-1$. Оба корня лежат в левой полуплоскости, один из них отличен от нуля. Следовательно, начало устойчиво.

4°. Упражнения

Исследуйте устойчивость точки покоя системы:

1. $\begin{cases} x_1'=2x_1-3x_2, \\ x_2'=5x_1+6x_2. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x_1'=-4x_1-10x_2, \\ x_2'=x_1-2x_2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1'=12x_1+18x_2, \\ x_2'=-8x_1-12x_2. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x_1'=x_2, \\ x_2'=0. \end{cases}$

§ 5.2. Нелинейные автономные системы. Понятие о функции Ляпунова. Формулировка теоремы Ляпунова об устойчивости

1°. Нелинейные автономные системы. Рассмотрим нелинейную автономную систему

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(\vec{x}). \quad (1)$$

Будем предполагать, что вектор-функция $\vec{f}(\vec{x})$ удовлетворяет в некоторой области $D\subset\mathbb{R}^n$ теореме существования и единственности решения задачи Коши (см. § 4.1).

Приведем свойства решений системы (1).

1°. *Если $\vec{x}=\vec{x}(t)$ — решение системы* (1), *то при любой постоянной C вектор-функция $\vec{x}=\vec{x}(t+C)$ также является решением системы* (1).

В самом деле, очевидны следующие равенства:

$$\frac{d\vec{x}(t+C)}{dt}=\frac{d\vec{x}(t+C)}{d(t+C)}=\vec{f}(\vec{x}(t+C)).$$

2°. *Две траектории системы* (1) *либо совпадают, либо не имеют общих точек.*

Пусть γ_1 и γ_2 — траектории решений $\vec{x}=\vec{x}_1(t)$ и $\vec{x}=\vec{x}_2(t)$. Предположим, что γ_1 и γ_2 имеют общую точку $\vec{x}_0$. Тогда $\vec{x}_1(t_1)=\vec{x}_0=$ $=\vec{x}_2(t_2)$. Согласно свойству 1°, вектор-функция $\vec{x}=\vec{x}_2(t+(t_2-t_1))\equiv$ $\equiv\vec{x}_3(t)$ является решением системы (1) и $\vec{x}_3(t_1)=\vec{x}_1(t_1)$, так что $\vec{x}_3(t)\equiv\vec{x}_1(t)$ в силу теоремы единственности решения задачи Коши. Следовательно, $\vec{x}_1(t)\equiv\vec{x}_2(t+(t_2-t_1))$, т. е. траектории γ_1 и γ_2 совпадают.

3°. *Если $\vec{a}$ — положение равновесия системы* (1), *то* $\vec{x}(t)\equiv$ $\equiv\vec{a}$ $(-\infty<t<\infty)$ *также является решением системы* (1).

В самом деле, $\dfrac{d\vec{x}}{dt}=\dfrac{d\vec{a}}{dt}=\vec{0}$, $\vec{f}(\vec{x}(t))=\vec{f}(\vec{a})=\vec{0}$.

Из свойства 3° вытекает, что если $\vec{a}$ — положение равновесия, то точка $\vec{x}=\vec{a}$ есть траектория системы (1).

4°. *Траектория, отличная от точки, является гладкой кривой, т. е. в каждой ее точке имеется ненулевой касательный вектор.*

В самом деле, если $\vec{x}=\vec{x}(t)$ — решение системы (1), то касательный вектор к траектории в точке $\vec{x}_0=\vec{x}(t_0)$ равен $\vec{x}'(t_0)$. Из системы (1) видно, что $\vec{x}'(t_0)=\vec{f}(\vec{x}_0)\neq\vec{0}$.

5°. *Любая траектория системы* (1) *принадлежит к одному из следующих трех типов:* а) *точка;* б) *замкнутая гладкая кривая (цикл);* в) *гладкия кривая без самопересечений.*

В самом деле, если траектория не есть положение равновесия (точка), то в силу свойства 3° она является гладкой кривой, которая либо замкнута, либо не замкнута.

6°. *Пусть* $\vec{x}(t;\vec{x}_0)$, $\vec{x}(0;\vec{x}_0)=\vec{x}_0$ *есть решение задачи Коши для системы* (1). *Тогда*

$$\vec{x}(t_1+t_2;\vec{x}_0)=\vec{x}(t_2;\ \vec{x}(t_1;\ \vec{x}_0))=\vec{x}(t_1;\ \vec{x}(t_2;\ \vec{x}_0)).$$

В самом деле, вектор-функции $\vec{x}_1(t)=\vec{x}(t;\ \vec{x}(t_1;\ \vec{x}_0))$, $\vec{x}_2(t)=\vec{x}(t+t_1;\ \vec{x}_0)$ в силу свойства 1° являются решениями системы (1). При $t=0$ имеем $\vec{x}_1(0)=\vec{x}(t_1;\ \vec{x}_0)$, $\vec{x}_2(0)=\vec{x}(t_1;\vec{x}_0)$, т. е. $\vec{x}_1(0)=\vec{x}_2(0)$. В силу теоремы единственности решения задачи Коши, $\vec{x}_1(t)\equiv\vec{x}_2(t)$ при всех t, откуда следует первое из искомых равенств. Аналогично доказывается, что $\vec{x}(t_1+t_2;\ \vec{x}_0)=\vec{x}(t_1;\ \vec{x}(t_2;\ \vec{x}_0))$.

Свойство 6° называется *групповым свойством* решений автономной системы (1).

7°. *Справедливо равенство* $\vec{x}(-t;\ \vec{x}(t;\ \vec{x}_0))=\vec{x}_0$ (это вытекает из свойства 6°).

Определим отображение g^t с помощью равенства $g^t\vec{y}=\vec{x}(t,\ \vec{y})$ $\forall\vec{y}\in D$, где $\vec{x}(t,\ \vec{y})$, $\vec{x}(0,\ \vec{y})=\vec{y}$ есть решение системы (1).

Отображение g^t называется *фазовым потоком*, определяемым системой (1). Каждая точка $\vec{y}\in D$ отображается в точку $g^t\vec{y}$, лежащую в области D.

Из свойств 6° и 7° вытекает, что

$$g^{t_1+t_2}=g^{t_1}g^{t_2}=g^{t_2}g^{t_1},\quad g^tg^{-t}=I,$$

где I — тождественное отображение, т. е. $I\vec{x}=\vec{x}$ для любой точки $\vec{x}\in D$. Первое из указанных соотношений означает групповое свойство решений: $g^{(t_1+t_2)}\vec{y}=g^{t_1}(g^{t_2}\vec{y})$ для любой точки $\vec{y}\in D$.

Множество отображений g^t, зависящих от одного вещественного параметра t и обладающих указанными выше свойствами, принято называть однопараметрической группой преобразований (или динамической системой).

2°. Понятие о функции Ляпунова. Формулировки теорем Ляпунова об устойчивости и неустойчивости. Предположим, что неавтономная система

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(t,\ \vec{x}) \tag{2}$$

имеет нулевое решение, т. е. $\vec{f}(t,\ \vec{0})=\vec{0}$ $\forall t\geqslant t_0$, и ограничимся изучением устойчивости и неустойчивости нулевого решения системы (2) с помощью некоторых вспомогательных скалярных функций $V(\vec{x})$ и $W(\vec{x})$, называемых *функциями Ляпунова*. Метод функций

Ляпунова является одним из важных методов изучения устойчивости решений нелинейных систем дифференциальных уравнений.

Теорема 1 (теорема Ляпунова об устойчивости). *Пусть существует непрерывно дифференцируемая скалярная функция* $V(\vec{x})$, *положительная при* $\vec{x} \neq 0$, *равная нулю при* $\vec{x} = \vec{0}$ *и такая, что*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} f_k \leqslant 0 \quad \forall t \geqslant t_0 \;\; \forall \vec{x}, \; |\vec{x}| \leqslant r,$$

где r — *положительная постоянная. Тогда нулевое решение* $\vec{x} = \vec{0}$ *системы* (2) *устойчиво по Ляпунову.*

Теорема 2 (теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости). *Пусть существуют непрерывно дифференцируемые скалярные функции* $V(\vec{x})$ *и* $W(\vec{x})$, *положительные при* $\vec{x} \neq \vec{0}$, *равные нулю при* $\vec{x} = \vec{0}$ *и такие, что*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} f_k \leqslant -W \quad \forall t \geqslant t_0 \;\; \forall \vec{x}, \; |\vec{x}| \leqslant r,$$

где r — *положительная постоянная. Тогда нулевое решение* $\vec{x} = \vec{0}$ *системы* (2) *асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

Теорема 3 (теорема Ляпунова о неустойчивости). *Пусть существует непрерывно дифференцируемая скалярная функция* $V(\vec{x})$, *для которой в любой окрестности нуля имеется* $\vec{y} \neq \vec{0}$ *такое, что* $V(\vec{y}) > 0$, *и пусть существует непрерывно дифференцируемая скалярная функция* $W(\vec{x})$, *положительная при* $\vec{x} \neq \vec{0}$ *и равная нулю при* $\vec{x} = 0$. *Пусть, кроме того*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} f_k \geqslant W \quad \forall t \geqslant t_0 \;\; \forall \vec{x}, \; |\vec{x}| \leqslant r,$$

где r — *положительная постоянная. Тогда нулевое решение* $\vec{x} = \vec{0}$ *системы* (2) *неустойчиво по Ляпунову.*

Примеры. 1. Рассмотрим систему $x'_1 = -x_1 + 3x^2_2$, $x'_2 = -x_1x_2 - x^3_2$. Возьмем положительную скалярную функцию $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x^2_1 + x^2_2)$, $V(0, 0) = 0$. Тогда

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2 = x_1(-x_1 + 3x_2^2) + x_2(-x_1x_2 - x_2^3) = -(x_1 - x_2^2)^2 .$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial V}{\partial x_k} f_k = -(x_1 - x_2^2)^2 \leqslant 0 \quad \forall\, x_1,\ x_2.$$

В силу теоремы Ляпунова об устойчивости нулевое решение $x_1 = x_2 = 0$ данной системы устойчиво по Ляпунову.

2. Рассмотрим систему

$$x_1' = -\frac{2x_1}{(1+x_1)^2} + 2x_2,\quad x_2' = -\frac{2x_2}{(1+x_1)^2} - \frac{2x_1}{(1+x_1^2)^2}.$$

Возьмем положительные скалярные функции

$$V(x_1,\ x_2) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2,\quad W(x_1,\ x_2) = \frac{4}{(1+x_1)^2}\left[\frac{x_1^2}{(1+x_1^2)^2} + x_2^2\right],$$

равные нулю при $x_1 = x_2 = 0$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial V}{\partial x_k} \cdot f_k = \frac{2x_1}{1+x_1^2}\left[-\frac{2x_1}{(1+x_1)^2} + 2x_2\right] + 2x_2\left[-\frac{2x_2}{(1+x_1)^2} - \frac{2x_1}{(1+x_1^2)^2}\right] \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{4}{(1+x_1)^2}\left[\frac{x_1^2}{(1+x_1^2)^2} + x_2^2\right] \forall\, x_1,\ x_2.$$

В силу теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости нулевое решение $x_1 = x_2 = 0$ данной системы асимптотически устойчиво по Ляпунову.

3°. Упражнения

Покажите, что нулевое решение системы является устойчивым (здесь и далее дифференцирование производится по t):

1. $x_1' = -x_1 + x_2,\ \ x_2' = -x_1.$

2. $x_1' = -x_1 - x_2^3,\ \ x_2' = x_1^3.$

3. $x_1' = -\frac{1}{2}x_2,\ \ x_2' = \frac{1}{2}x_1.$

Покажите, что нулевое решение системы является асимптотически устойчивым:

4. $x_1' = -x_1 + x_2 + x_1x_2,\ \ x_2' = -x_1 - x_2 - x_1^2 - x_2^3.$

5. $x_1' = -x_2 - x_1^3,\ \ x_2' = x_1 - x_2^3.$

6. $x_1' = x_1^3 - x_2,\ \ x_2' = x_1 + x_2^3.$

Указание. Для решения используйте следующие функции Ляпунова: 1) $V = x_1^2 + x_2^2$; 2) $V = x_1^4 + x_2^4$; 3) $V = x_1^2 + x_2^2$; 4) $V = x_1^2 + x_2^2$, $W = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_2^4)$; 5) $V = x_1^2 + x_2^2$, $W = 2(x_1^4 + x_2^4)$; 6) $V = x_1^2 + x_2^2$, $W = 2(x_1^4 + x_2^4)$.

Глава VI

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 6.1. Двойные и тройные интегралы, их свойства. Геометрический и физический смысл интегралов. Представление об интегралах любой кратности

1°. Двумерные интегральные суммы Римана и двойной интеграл. Рассмотрим на плоскости компактную фигуру Ф, ограниченную замкнутой гладкой (или кусочно-гладкой) кривой Λ (рис. 87).

Диаметром компактной фигуры называется точная верхняя грань расстояний между двумя любыми точками этой фигуры. Геометрически диаметр компактной фигуры представляет собой наибольшую из ее хорд. Если диаметр компактной фигуры стремится к нулю, то фигура стягивается в точку.

Определение 1. Разбиением $\{\Phi_k\}$ квадрируемой фигуры Ф называется такая совокупность квадрируемых фигур Φ_k, объединение которых составляет фигуру Ф, причем никакие две различные фигуры Φ^k не имеют общих внутренних точек. (Здесь $\{\Phi_k\}$ есть сокращенная запись совокупности $\{\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n\}$.)

Определение 2. Наибольший из диаметров фигур, составляющих разбиение, называют *диаметром разбиения* $\{\Phi_k\}$ и обозначают через d.

Пусть на плоской компактной фигуре Ф задана функция $f:\Phi\to\mathbf{R}$. Для определения двойного (двумерного) интеграла (по Риману) от функции f по фигуре Ф произведем следующие операции:

1. Рассмотрим разбиение $\{\Phi_k\}$ фигуры Ф (рис. 87). Это разбиение должно быть таким, чтобы все частичные фигуры Φ_k были квадрируемыми, т. е. имели площади, которые обозначим через Δs_k (понятие квадрируемости фигуры см. в п. 1° § 2.2).

2. В каждой фигуре Φ_k разбиения $\{\Phi_k\}$ выберем произвольную точку $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\in\Phi_k$. В этом случае будем говорить, что имеется разбиение $\{\Phi_k\}$ с отмеченными точками $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$.

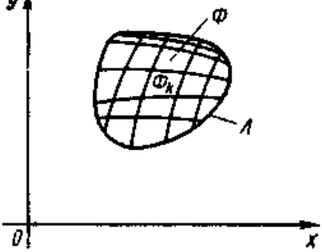


Рис. 87

Если диаметр d разбиения фигуры Ф стремится к нулю, то число n фигур Φ_k неограниченно увеличивается, т. е. $n\to\infty$.

3. Вычислим значения функции f в отмеченных точках $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$ и составим сумму парных произведений

$$\omega_n=\sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\,\Delta s_k. \qquad (1)$$

Суммы вида (1) называются *двумерными интегральными суммами Римана* функции $f(x, y)$, соответствующими разбиению $\{\Phi_k\}$ с отмеченными точками $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$, $k=1,\dots,n$.

Определение 3. Число I называется *пределом интегральных сумм* (1) при $d\to 0$, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta>0$, что при $d<\delta$ независимо от выбора отмеченных точек (x_k, y_k) в частичных фигурах Φ_k выполняется неравенство $|\omega_n-I|<\varepsilon$.

Определение 4. Предел двумерных интегральных сумм (1) при $d\to 0$ (если он существует) называется *двойным* (или *двумерным*) *интегралом* (*по Риману*) от функции $f(x, y)$ по области Ф и обозначается $\iint\limits_{\Phi} f(x, y)\,ds$, т. е.

$$\iint\limits_{\Phi} f(x, y)\,ds=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\,\Delta s_k. \qquad (2)$$

В этом случае функция $f(x, y)$ называется *интегрируемой* (*по Риману*) в области Ф.

Переменные x, y принято называть *переменными интегрирования*; $f(x, y)\,ds$ — *подынтегральным выражением*; $f(x, y)$ — *подынтегральной функцией*; ds — *двумерным элементом площади*; Ф — *областью интегрирования.*

Комментарии к определению 4. 1) В дальнейшем в качестве области интегрирования Ф будем рассматривать компактные фигуры, имеющие гладкие или кусочно-гладкие границы. При разбиении фигуры Ф будем делить ее на частичные фигуры Φ_k, имеющие кусочно-гладкие границы.

2) Имеется глубокая аналогия двух понятий — обычного определенного и двойного интегралов. В обоих случаях рассматривают некоторую функцию: в первом случае — функцию от одной переменной, определенную на отрезке $[a, b]\subset\mathbb{R}$, во втором — функцию от двух переменных, определенную на плоской фигуре $\Phi\subset\mathbb{R}^2$. В том и другом случае область определения функции разбивают на части и выбирают произвольно отмеченные точки, в которых вычисляют

значение функции f. Затем вычисленные значения функции умножают на меру соответствующих частей. Для функции одной переменной такой мерой служит длина отрезка $[x_{k-1}, x_k]$, а для функции двух переменных — площадь Δs_k части Φ_k. Наконец, в том и другом случае составляют интегральные суммы Римана, соответствующие разбиениям с отмеченными точками и находят их предел при стремлении к нулю диаметра разбиений.

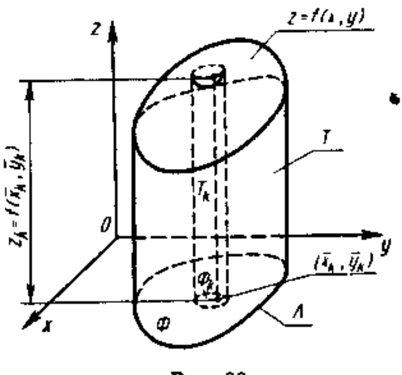


Рис. 88

Весьма полезным является так называемое прямоугольное разбиение $\{\Phi_{kj}\}$ фигуры Φ, образуемое прямыми, параллельными осям координат Ox и Oy. В этом случае фигуры Φ_{kj} представляют собой прямоугольники со сторонами, длины которых равны Δx_k и Δy_j (за исключением фигур, примыкающих к границе Λ). Чтобы подчеркнуть, что разбиение является прямоугольным, в обозначении интеграла (2) положим $\mathrm{d}s = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Тогда

$$\iint\limits_{\Phi} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{d\to 0} \sum_k \sum_j f(\bar{x}_k, \bar{y}_j)\,\Delta x_k \Delta y_j, \tag{3}$$

где $(\bar{x}_k, \bar{y}_j) \in \Phi_{kj}$ и суммирование в равенстве (3) распространяется на все значения k и j, для которых $\Delta s_{kj} = \Delta x_k \Delta y_j$. Можно доказать, что непрямоугольные фигуры, примыкающие к границе Λ, не влияют на значение предела (3).

Выражение $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ называется *двумерным элементом площади в декартовых координатах.*

2°. Геометрический и физический смысл двойного интеграла. Вычислим объем *цилиндроида* T, т. е. тела $T \subset \mathbf{R}^3$, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, снизу — плоскостью $z = 0$, сбоку — цилиндрической поверхностью, направляющей которой служит гладкая граница Λ компактной фигуры Φ, а образующими — прямые, параллельные оси Oz (рис. 88).

Для приближенного вычисления объема V цилиндроида T произведем следующие операции. Разобьем фигуру Φ с помощью произвольной сетки гладких линий на части Φ_k. Границу каждой такой части примем за направляющую цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны оси Oz. Эти поверхности разобьют цилиндроид T на столбики, которые примем за обычные цилиндры (рис. 88). Тогда объем отдельного столбика приближенно выразится произведением $f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\Delta s_k$, а объем цилиндроида — суммой таких произведений:

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\Delta s_k, \tag{4}$$

являющейся двумерной интегральной суммой для функции $f(x, y)$ по разбиению $\{\Phi_k\}$ фигуры Φ с отмеченными точками $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$. Формула (4) позволяет найти объем V с любой степенью точности, если число частичных фигур Φ_k достаточно велико и диаметр d разбиения $\{\Phi_k\}$ достаточно мал. *Объемом цилиндроида* называется предел правой части равенства (4) при $d \to 0$:

$$V = \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\Delta s_k = \iint_{\Phi} f(x, y)\,dx\,dy \tag{5}$$

(если он существует). Итак, при $f > 0$, $(x, y) \in \Phi$ объем цилиндроида T вычисляется по формуле (5) (геометрический смысл двойного интеграла).

Перейдем теперь к физическому смыслу двойного интеграла. Будем называть средней плотностью материальной фигуры Φ отношение ее массы к площади, а плотностью материальной фигуры в данной ее точке — предел средней плотности малого участка фигуры, стягивающегося в эту точку. Предположим, что материальная квадрируемая фигура имеет плотность $\rho(x, y)$, являющуюся непрерывной функцией от $(x, y) \in \Phi$. При $f(x, y) = \rho(x, y)$ двойной интеграл представляет собой массу m материальной фигуры Φ. В самом деле, рассмотрим разбиение $\{\Phi_k\}$ фигуры Φ с площадями $\Delta s_1, \ldots, \Delta s_k$ и диаметрами $d_1, \ldots, d_k$. Наибольший из диаметров обозначим через d. Эта величина характеризует «размер» фигур T_k. Если d мало, то в пределах малой фигуры T_k плотность $\rho(x, y)$, будучи непрерывной функцией, изменяется незначительно и приближенно может считаться постоянной. Значение этой постоянной можно принять равным значению $\rho(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$ плотности $\rho(x, y)$ в некоторой произвольной точке $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$ фигуры T_k. В этом случае масса частичной фигуры T_k приближенно равна произведению $\rho(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\Delta s_k$, а масса всей фигуры T — сумме таких произведений:

$$m \approx \sum_{k=1}^{n} \rho(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\Delta s_k. \tag{6}$$

За точное значение искомой массы m примем предел правой части равенства (6) при $d \to 0$. Так как правая часть равенства (6) есть двумерная интегральная сумма для $\rho(x, y)$ по разбиению $\{\Phi_k\}$ с отмеченными точками $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$, то масса материальной фигуры Φ равна двойному интегралу от плотности $\rho(x, y)$ по области Φ:

$$m = \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\Delta s_k = \iint_{\Phi} \rho(x, y)\,ds \tag{7}$$

(физический смысл двойного интеграла).

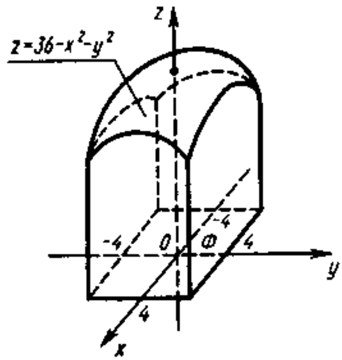


Рис. 89

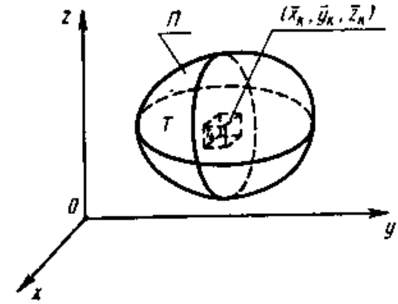


Рис. 90

Приведем без доказательства признаки существования двойного интеграла.

Теорема 1 (необходимый признак). *Функция $f:\Phi\to\mathbb{R}$, интегрируемая на $\Phi\subset\mathbb{R}^2$, ограничена на Φ.*

Доказательство этого признака аналогично доказательству подобного признака в одномерном случае (см. п. 2° § 2.1).

Теорема 2 (первый достаточный признак). *Функция $f:\Phi\to\mathbb{R}$, непрерывная на компактной фигуре Φ с кусочно-гладкой границей, интегрируема на Φ.*

Теорема 3 (второй достаточный признак). *Функция $f:\Phi\to\mathbb{R}$, непрерывная на компактной фигуре Φ всюду, за исключением конечных разрывов (скачков) на конечном числе гладких кривых вида $y=\varphi(x)$ и $x=\psi(y)$, интегрируема на Φ.*

Пример. Используя двумерную интегральную сумму, приближенно вычислить объем цилиндроида T, ограниченного следующими поверхностями: квадратом $-4\leqslant x\leqslant 4$, $-4\leqslant y\leqslant 4$; плоскостями $x_1=4$, $x_2=-4$, $y_1=4$, $y_2=-4$; параболоидом вращения $z=36-x^2-y^2$ (рис. 89).

Решение. Так как цилиндроид симметричен относительно оси Oz, то достаточно вычислить 1/4 его объема. Для этого соответствующую часть области интегрирования Φ разобьем прямыми $x=1$, $x=3$, $y=1$ и $y=3$. Возьмем точки (1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3) и вычислим в них значения функции $z=36-x^2-y^2$; имеем $z(1,1)=32$, $z(1,3)=26$, $z(3,1)=26$, $z(3,3)=18$.

Составим двумерную интегральную сумму для заданного разбиения с указанными отмеченными точками:

$$\sum_{k=1}^{4} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\Delta s_k=32\cdot 4+26\cdot 4+26\cdot 4+18\cdot 4=408.$$

Следовательно, объем V цилиндроида приближенно равен $4\times 408=1632$.

3°. Трехмерные интегральные суммы Римана и тройной интеграл. Определение тройного (трехмерного) интеграла аналогично определениям определенного (одинарного) и двойного (двумерного) интегралов. Пусть на пространственном компактном теле $T \subset \mathbb{R}^3$ задана функция $f: T \to \mathbb{R}$. Рассмотрим разбиение $\{T_k\}$ тела T с диаметрами d_k и с объемами Δv_k $(k=1, \ldots, n)$. На рис. 90 изображено одно такое тело T_k. Наибольший из диаметров d_k назовем диаметром произведенного разбиения и обозначим через d. В каждом частичном теле T_k выберем произвольно точку $(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$ и составим сумму

$$\omega_n = \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)\Delta v_k. \tag{8}$$

Суммы вида (8) называются *трехмерными интегральными суммами Римана функции* $f(x, y, z)$, соответствующими разбиению $\{T_k\}$ с отмеченными точками $(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$. Определение предела трехмерных интегральных сумм аналогично определению предела двумерных интегральных сумм вида (1).

Определение 5. Предел трехмерных интегральных сумм (8) при $d \to 0$ (если он существует) называется *тройным* (или *трехмерным*) *интегралом* (*по Риману*) от функции $f(x, y, z)$ по области T и обозначается $\iiint\limits_T f(x, y, z)\,\mathrm{d}v$, $\iiint\limits_T f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. Таким образом,

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)\,\mathrm{d}v = \iiint\limits_T f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =$$

$$= \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)\Delta v_k. \tag{9}$$

В этом случае функция $f(x, y, z)$ называется *интегрируемой* (*по Риману*) в области T. Переменные x, y, z принято называть *переменными интегрирования*; $f(x, y, z)$ — *подынтегральной функцией*; $\mathrm{d}v$ или $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ — *элементом объема в декартовых координатах*; T — *областью интегрирования*.

Можно доказать, что если подынтегральная функция $f(x, y, z)$ непрерывна на компактном теле T с кусочно-гладкой границей, то тройной интеграл (9) всегда существует.

4°. Геометрический и физический смысл тройного интеграла. Тройной интеграл по телу T от функции $f(x, y, z)$, тождественно равной единице на T, равен объему этого тела, т. е.

$$V = \iiint\limits_T \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{10}$$

(геометрический смысл тройного интеграла). Доказательство этого утверждения непосредственно следует из определения тройного интеграла.

Тройной интеграл по области T от плотности $\rho(x, y, z)$ материального тела T равен массе этого тела, т. е.

$$m=\iiint_{T}\rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz \tag{11}$$

(физический смысл тройного интеграла). Доказательство этого утверждения аналогично доказательству подобного утверждения в двумерном случае.

5°. Основные свойства двойного и тройного интегралов. Свойства кратных интегралов (и их вывод) аналогичны свойствам определенных интегралов. Поэтому ограничимся формулировкой этих свойств для двойного интеграла.

1°. *Интеграл* $\iint_{\Phi} dx\,dy$ *по фигуре* Φ *равен площади этой фигуры.*

2°. Аддитивность. *Если функция* f *интегрируема на фигуре* Φ, *а фигура* Φ *разбита на две связные и не имеющие общих внутренних точек фигуры* Φ_1 *и* Φ_2, *то* $f(x, y)$ *интегрируема на каждой из фигур* Φ_1 *и* Φ_2, *причем*

$$\iint_{\Phi} f(x, y)\,dx\,dy=\iint_{\Phi_1} f(x, y)\,dx\,dy+\iint_{\Phi_2} f(x, y)\,dx\,dy.$$

3°. Линейность. *Если функции* f_1 *и* f_2 *интегрируемы на фигуре* Φ, *то функция* $c_1f_1+c_2f_2$, *где* c_1 *и* c_2 — *любые вещественные числа, также интегрируема на фигуре* Φ, *причем*

$$\iint_{\Phi} (c_1f_1(x, y)+c_2f_2(x, y))\,dx\,dy=$$

$$=c_1\iint_{\Phi} f_1(x, y)\,dx\,dy+c_2\iint_{\Phi} f_2(x, y)\,dx\,dy, \tag{12}$$

т. е. действия интегрирования и суммирования перестановочны.

Частные случаи формулы (12):

$$\iint_{\Phi}(f_1(x, y)+f_2(x, y))\,dx\,dy=$$

$$=\iint_{\Phi} f_1(x, y)\,dx\,dy+\iint_{\Phi} f_2(x, y)\,dx\,dy$$

(интеграл от суммы равен сумме интегралов);

$$\iint_{\Phi} cf(x, y)\,dx\,dy=c\iint_{\Phi} f(x, y)\,dx\,dy$$

(постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла).

4°. Монотонность. *Если функции $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ интегрируемы на фигуре Φ и всюду в этой области $f_1(x, y) \leqslant f_2(x, y)$, то*

$$\iint_{\Phi} f_1(x, y)\,dx\,dy \leqslant \iint_{\Phi} f_2(x, y)\,dx\,dy. \tag{13}$$

В частности, если $f_2(x, y) \geqslant 0$, то $\iint_{\Phi} f_2(x, y)\,dx\,dy \geqslant 0$.

5°. Оценка абсолютной величины интеграла. *Если функция $f(x, y)$ интегрируема на фигуре Φ, то и функция $|f(x, y)|$ интегрируема на этой фигуре, причем*

$$\left|\iint_{\Phi} f(x, y)\,dx\,dy\right| \leqslant \iint_{\Phi} |f(x, y)|\,dx\,dy, \tag{14}$$

т. е. абсолютная величина двойного интеграла не превосходит двойного интеграла от абсолютной величины подынтегральной функции.

6°. Теорема о среднем значении. *Если функция f непрерывна на связной фигуре Φ, то найдется такая точка $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Phi$, что*

$$\iint_{\Phi} f(x, y)\,dx\,dy = f(\bar{x}, \bar{y})\,S, \tag{15}$$

где S — площадь связной фигуры Φ.

Свойство 6° имеет следующую геометрическую интерпретацию: объем V цилиндроида T, ограниченного снизу компактной связной фигурой Φ, сбоку — цилиндрической поверхностью и сверху — непрерывной поверхностью $z = f(x, y)$, равен объему прямого цилиндра с основанием Φ и высотой $f(\bar{x}, \bar{y})$, равной значению функции $f(x, y)$ в некоторой точке $(\bar{x}, \bar{y})$ фигуры Φ (рис. 91). Значение функции $f(\bar{x}, \bar{y})$, определяемое по формуле (15), называется *средним значением* функции $f(x, y)$.

6°. Понятие об n-кратных интегралах. Пусть дана функция $f : \mathrm{T} \xrightarrow{n} \mathbf{R}$ от n переменных на n-мерном компактном теле T^n в пространстве $\mathbf{R}^n$, например на n-мерном призматоиде T^n, заданном неравенствами $a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, \ldots, a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$. Используя приведенную выше схему, определим n-кратный интеграл от функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ по n-мерному компактному телу T^n. А именно, разобьем тело T^n на k компактных «ячеек» $\mathrm{T}^n{}_1, \ldots, \mathrm{T}^n{}_k$ с мерами (n-мерными объемами) $\Delta q_1, \ldots, \Delta q_k$ и диаметрами $d_1, \ldots, d_k$. Наибольший из диаметров назовем диаметром разбиения $\{\mathrm{T}_i{}^n\}$ тела T^n и обозначим через d. В каждой ячейке $\mathrm{T}_i{}^n$ выберем точку $(\bar{x}_1{}^i, \ldots, \bar{x}_n{}^i)$ и составим n-мерную интегральную сумму

$$\omega_n = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_1^i, \ldots, \bar{x}_n)\,\Delta q_i. \tag{16}$$

Определение предела интегральных сумм (16) при $d \to 0$ аналогично определению интегральных сумм (1) при $d \to 0$.

Определение 6. Предел n-мерных интегральных сумм (16) при $d \to 0$ (если он существует) называется *n-кратным* (или *n-мерным*) *интегралом* (*по Риману*) от функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ по области T^n:

$$\iint\limits_{T^n} \ldots \int f(x_1, \ldots, x_n)\,dq =$$

$$= \iint\limits_{T^n} \ldots \int f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_1^k, \ldots, \bar{x}_n^k)\,\Delta q_k. \quad (17)$$

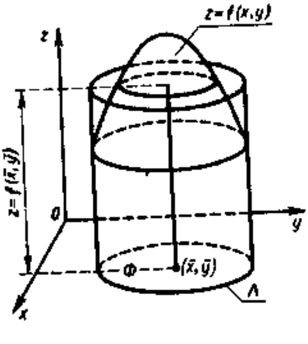


Рис. 91

Функцию $f: T^n \to \mathbb{R}$ называют в этом случае *интегрируемой* (*по Риману*). Если $n=1$, то n-кратный интеграл является определенным интегралом, а если $n=2$ ($n=3$) — двойным (тройным) интегралом.

Отметим, что для n-кратного интеграла (16) справедливы обычные свойства интеграла: линейность, аддитивность областей, по которым производится интегрирование, интегрирование нестрогих неравенств, теорема о среднем значении. Детальное изложение теории n-кратного интеграла содержится в более подробных курсах математического анализа.

Приведем единообразное определение определенного интеграла любой кратности. Рассмотрим область D в прямоугольной декартовой системе координат. Эта область может быть одномерной (прямолинейный отрезок), двумерной (плоская фигура), трехмерной (пространственное тело) и n-мерной (n-мерное тело, $n>3$). Будем обозначать через Q меру области D, соответственно — длину, площадь, объем или n-мерный объем.

Пусть в области D определена некоторая функция, имеющая в каждой точке M этой области значение $f(M)$. В соответствии с числом измерений области D функция $f(M)$ зависит от одного, двух, трех или n ($n>3$) аргументов, являющихся координатами точки $M \in D$.

Разобьем область D на n частичных областей $D_1, D_2, \ldots, D_n$. Возьмем в этих областях произвольные отмеченные точки $\bar{N}_1, \bar{N}_2, \ldots, \bar{N}_n$, вычислим значения функции f в этих точках и составим интегральную сумму для разбиения $\{D_k\}$ с отмеченными точками:

$$\omega_n = \sum_{k=1}^{n} f(\bar{N}_k)\,D_k. \quad (18)$$

Если существует предел интегральных сумм (18) при стремлении диаметра разбиения к нулю, то он называется *определенным ин-*

тегралом от функции $f(M)$ по области D и обозначается символом $\int\limits_D f(M)\,dq$. Этот интеграл является двойным, тройным или n-кратным в зависимости от числа измерений области D.

7°. Упражнения

Используя двумерную интегральную сумму, вычислите приближенно объем цилиндроида Т, ограниченного поверхностями Ф, Π_1 и Π_2 (выберите 3—5 значений интегральной суммы, проследив характер ее изменения).

1. Ф — квадрат $-4\leqslant x\leqslant 4$, $-4\leqslant y\leqslant 4$, $z=0$; Π_1 — плоскости $x=4$, $x=-4$, $y=4$, $y=-4$; Π_2 — параболоид вращения $z=x^2+y^2$.
2. Ф — круг $x^2+y^2\leqslant 25$, $z=0$; Π_1 — цилиндр $x^2+y^2=25$; Π_2 — параболоид вращения $z=x^2+y^2$.
3. Ф — прямоугольник $-3\leqslant x\leqslant 3$, $-4\leqslant y\leqslant 4$, $z=0$; Π_1 — плоскости $x=3$, $x=-4$, $y=4$, $y=-4$; Π_2 — параболоид вращения $z=\dfrac{x^2+y^2}{5}-8$.
4. Ф — круг $x^2+y^2\leqslant 36$, $z=0$; Π_1 — цилиндр $x^2+y^2=36$; Π_2 — параболоид вращения $z=\dfrac{x^2+y^2}{5}-8$.

§ 6.2. Вычисление двойных и тройных интегралов в декартовых координатах

1°. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах. Пусть фигура Ф задана неравенствами вида $a\leqslant x\leqslant b$, $y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x)$ (рис. 92), где $y=y_1(x)$ и $y=y_2(x)$ —гладкие функции на $[a, b]$. Такую (компактную) фигуру Ф будем называть *выпуклой вдоль оси* Oy (или выпуклой относительно x). Фигура Ф является выпуклой вдоль Oy в том и только в том случае, если вертикальная прямая, проходящая через точку x $(a<x<b)$ оси Ox, пересекает границу Λ фигуры Ф только в двух точках $M_1(x, y_1)$ и $M_2(x, y_2)$, называемых соответственно точкой входа и выхода.

Пусть функция $f(x, y)$ интегрируема по плоской фигуре Ф, выпуклой вдоль оси Oy и проектирующейся на отрезок $[a, b]$ оси Ox. Если $f(x, y)$ при любом $x\in[a, b]$ интегрируема по переменной y на отрезке $[y_1(x), y_2(x)]$, т. е. если существует определенный интеграл

$$S(x)=\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy \quad \forall\, x\in[a, b], \tag{1}$$

то справедлива формула

$$\iint\limits_{\Phi} f(x, y)\,dx\,dy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy. \tag{2}$$

Интеграл в правой части равенства (2) называется *повторным интегралом*. Формула (2) справедлива и для фигур Ф, являющихся объединением конечного числа фигур, выпуклых вдоль оси Oy.

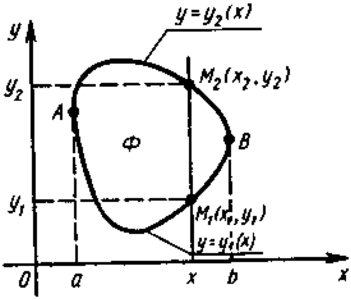


Рис. 92

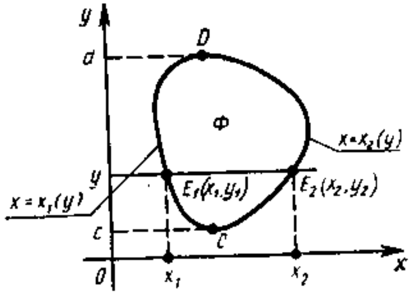


Рис. 93

Формула (2) означает, что двойной интеграл равен соответствующему повторному интегралу, в котором интегрирование сначала выполняется по y при фиксированном x, а затем полученный результат интегрируется по x.

Если фигура Ф выпукла вдоль оси Ox (выпукла относительно y), т. е. задается неравенствами вида $c \leqslant y \leqslant d$, $x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y)$ (рис. 93), то по аналогии с формулой (2) имеем

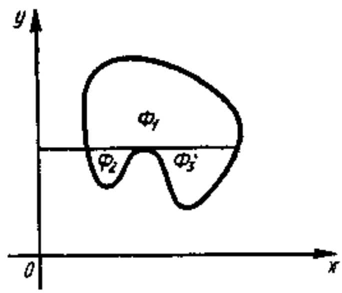


Рис. 94

$$\iint\limits_{\Phi} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_c^d \mathrm{d}y \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x, \tag{3}$$

где интегрирование сначала выполняется по x при фиксированном y, а затем полученный результат интегрируется по y.

В частности, если Ф — прямоугольник $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, то

$$\iint\limits_{\Phi} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \mathrm{d}x \int\limits_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y,$$

$$\iint\limits_{\Phi} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_c^d \mathrm{d}y \int\limits_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x.$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_a^b \mathrm{d}x \int\limits_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_c^d \mathrm{d}y \int\limits_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x, \tag{4}$$

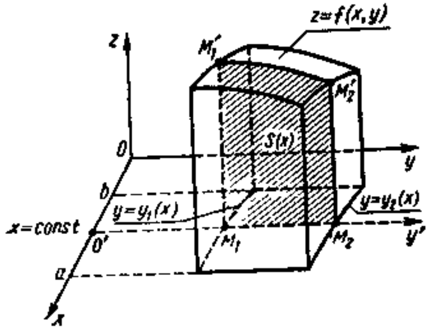


Рис. 95

т. е. *если пределы интегрирования в повторном интеграле постоянны, то результат интегрирования не зависит от порядка интегрирования.*

Если же фигура Φ не является выпуклой (рис. 94), то ее разбивают на конечное число фигур $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$, выпуклых вдоль осей координат Ox или Oy, и полагают

$$\iint_{\Phi} f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{\Phi_1} f(x, y)\,dx\,dy + \ldots + \iint_{\Phi_n} f(x, y)\,dx\,dy,$$

а затем применяют соответственно формулы (2) или (3).

Чтобы установить справедливость формулы (2), воспользуемся геометрическими соображениями. Предположим для определенности, что $f(x, y) \geqslant 0 \ \forall (x, y) \in \Phi$. Тогда двойной интеграл в левой части равенства (2) есть объем V цилиндроида (рис. 95), ограниченного снизу фигурой Φ, сверху — поверхностью $z = f(x, y)$ и сбоку — цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz, т. е.

$$V = \iint_{\Phi} f(x, y)\,dx\,dy. \tag{5}$$

С другой стороны, интеграл (1), являющийся внутренним в повторном интеграле (2), представляет собой площадь поперечного сечения цилиндроида плоскостью $M_1M_2M'_2M'_1$, перпендикулярной оси Ox в ее точке $x \in [a, b]$ (рис. 95), так как это сечение есть криволинейная трапеция, ограниченная снизу отрезком $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$ оси $O'y'$, параллельной Oy, а сверху — кривой $z = f(x, y)$, $x = c = \text{const}$. Согласно п. 3° § 2.3, объем V цилиндроида выражается через площадь поперечных сечений по формуле

$$V = \int_a^b S(x)\,dx. \tag{6}$$

Подставляя выражение $S(x)$ из равенства (1) в (6), получим

$$V = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy. \tag{7}$$

Левые части в соотношениях (5) и (7) равны; значит, равны и правые части этих соотношений, т. е. формула (2) справедлива. Аналогично доказывается и справедливость формулы (3).

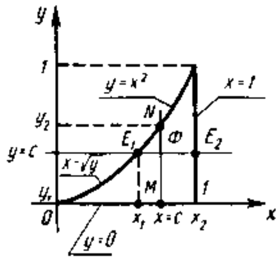


Рис. 96

Для вычисления двойного интеграла используется следующее правило.

1. Проверить условие выпуклости области Ф.

2. Если область Ф выпукла вдоль оси Oy, то найти уравнение $y=y_1(x)$ нижней части линии Λ и уравнение $y=y_2(x)$ верхней части этой линии.

3. Считая переменную x фиксированной, проинтегрировать функцию $f(x, y)$ в пределах от $y_1(x)$ до $y_2(x)$. Результатом вычисления является некоторая функция $F(x)$ от x.

4. Проинтегрировать функцию $F(x)$ по x от a до b, где числа a и b определяются из того условия, что прямые $x=a$ и $x=b$ касаются слева и справа заключенной между ними линии Λ. Результат вычисления есть некоторое число.

В случае выпуклой вдоль оси Ox области Ф правило вычисления двойного интеграла аналогично приведенному выше. Сначала находят уравнение $x=x_1(y)$ левой части линии Λ и уравнение $x=x_2(y)$ ее правой части. Затем, считая переменную y фиксированной, интегрируют функцию $f(x, y)$ по x в пределах от $x_1(y)$ до $x_2(y)$; результатом вычисления является некоторая функция $\Psi(y)$ от y. Наконец, интегрируют функцию $\Psi(y)$ по y от c до d, где числа c и d определяются из того условия, что прямые $y=c$ и $y=d$ касаются снизу и сверху заключенной между ними линии Λ; результат вычисления есть некоторое число.

Пример. Вычислить двойной интеграл $I=\iint\limits_{\Phi}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}s$, где область Ф ограничена линиями $y=0$, $y=x^2$, $x=0$, $x=1$ (рис. 96).

Решение. Проверим условие выпуклости области Ф; для этого проведем прямые $x=c$ $(0\leqslant c\leqslant 1)$ и прямые $y=c$ $(0\leqslant c\leqslant 1)$. Так как граница области пересекается любой из этих прямых только в двух точках, то Ф выпукла вдоль осей Ox и Oy.

Поскольку область Ф выпукла как вдоль оси Oy, так и вдоль оси Ox, в качестве переменной интегрирования для внутреннего интеграла можно взять либо y, либо x. Примем за переменную интегрирования y.

Составим выражение вида (2). При записи пределов интегрирования учитываем, что множество точек входа в область Ф есть прямая $y=0$, а множество точек выхода — парабола $y=x^2$. В рассматриваемой области x изменяется от 0 до 1. Следовательно,

$$I=\iint\limits_{\Phi}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int\limits_0^1\mathrm{d}x\int\limits_0^{x^2}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y.$$

Вычислим внутренний интеграл, считая в подынтегральной функции x фиксированным:

$$\int_0^{x^2} (x^2+y^2)\,dy=\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{x^2}=x^2\cdot x^2+\frac{(x^2)^3}{3}=x^4+\frac{x^6}{3}.$$

Вычислим внешний интеграл:

$$\int_0^1\left(x^4+\frac{x^6}{3}\right)dx=\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7\cdot 3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{5}+\frac{1}{21}=\frac{26}{105}.$$

Таким образом, $I=\frac{26}{105}$.

Произведем теперь перестановку переменных интегрирования, выбрав x в качестве переменной интегрирования для внутреннего интеграла. Составим выражение вида (3). При записи пределов интегрирования учитываем, что множество точек входа в область Ф есть парабола $x=\sqrt{y}$, а множество точек выхода — прямая $x=1$. В рассматриваемой области y изменяется от 0 до 1. Значит,

$$I=\iint_\Phi (x^2+y^2)\,dx\,dy=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1 (x^2+y^2)\,dx.$$

Вычислим внутренний интеграл, считая в подынтегральной функции y фиксированным:

$$\int_{\sqrt{y}}^1 (x^2+y^2)\,dx=\left(\frac{x^3}{3}+y^2x\right)\Bigg|_{\sqrt{y}}^1=$$

$$=\left(\frac{1}{3}+y^2\cdot 1\right)-\left[\frac{(\sqrt{y})^3}{3}+y^2\cdot\sqrt{y}\right]=\frac{1}{3}+y^2-\frac{y^{3/2}}{3}-y^{5/2}.$$

Вычислим внешний интеграл:

$$\int_0^1\left(\frac{1}{3}+y^2-\frac{y^{3/2}}{3}-y^{5/2}\right)dy=\left(\frac{y}{3}+\frac{y^3}{3}-\frac{2y^{5/2}}{5\cdot 3}-\frac{2y^{7/2}}{7}\right)\Bigg|_0^1=\frac{26}{105},$$

т. е. результат не изменился.

2⁰. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах. Пусть область интегрирования Т — компактное тело, выпуклое вдоль оси Oz (ср. с п. 1⁰), т. е. ограничено снизу и сверху соответственно гладкими поверхностями $z=z_1(x, y)$ и $z=z_2(x, y)$, причем проекция тела Т на плоскость xOy есть плоская фигура Φ_{xy} (рис. 97). Поэтому при фиксированных значениях $(x, y)\in\Phi_{xy}$ соответствующие аппликаты z точек тела Т изменяются на отрезке $[z_1(x, y), z_2(x, y)]$ оси Oz.

Рассуждая как и в п. 1^0, получим

$$\iiint\limits_{T} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\Phi_{xy}} dx\,dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz. \qquad (8)$$

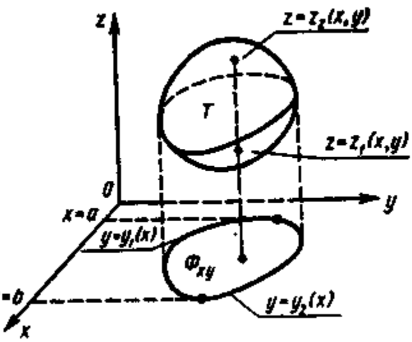


Рис. 97

Предположим, что фигура Φ_{xy} определяется неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$, $y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)$, где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — гладкие функции на отрезке $[a, b]$, т. е. фигура Φ_{xy} выпукла вдоль оси Oy. Тогда

$$\iint\limits_{\Phi_{xy}} dx\,dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz. \qquad (9)$$

Из формул (8) и (9) окончательно находим

$$\iiint\limits_{T} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz. \qquad (10)$$

Интеграл в правой части равенства (10) называется *повторным интегралом*.

Если прямые, параллельные осям, пересекают тело Т более чем в двух точках, то надо разбить его на части так, чтобы для каждой из этих частей указанные прямые пересекали тело не более чем в двух точках. Вычисляя по формуле (10) для каждой из полученных частей тройной интеграл и складывая результаты, находим интеграл по всему телу Т.

Если Т — прямоугольный параллелепипед, образуемый плоскостями $x=a_1$, $x=b_1$, $y=a_2$, $y=b_2$, $z=a_3$, $z=b_3$, то все пределы постоянны и

$$\iiint\limits_{T} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx \int\limits_{a_2}^{b_2} dy \int\limits_{a_3}^{b_3} f(x, y, z)\,dz. \qquad (11)$$

Обобщением прямоугольного параллелепипеда является призматоид T^n в n-мерном пространстве, определяемый неравенствами вида $a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, \ldots, a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$. Интегрирование по призматоиду сводится к вычислению повторного интеграла, у которого все пределы интегрирования постоянны:

$$\iint\limits_{T^n} \ldots \int f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \ldots \int\limits_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} dx_{n-1} \int\limits_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_n.$$

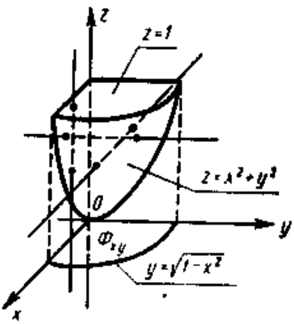


Рис. 98

Здесь результат интегрирования не зависит от порядка, в котором производится интегрирование.

Для вычисления тройного интеграла используется следующее правило.

1. Проверить условие выпуклости области.

2. Составить выражение вида (10). При записи пределов интегрирования учесть, что: а) $z=z_1(x, y)$ и $z=z_2(x, y)$ — уравнения поверхностей, представляющих собой соответственно множество точек входа в область и выхода из нее; б) $y=y_1(x)$ и $y=y_2(x)$ — уравнения линий, представляющих собой соответственно множество точек входа в область Φ_{xy} и выхода из нее; в) a, b — абсциссы крайних точек области Φ_{xy} в направлении оси Ox.

3. Последовательно вычислить:

а) внутренний интеграл $\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz$, где z — переменная интегрирования, а x и y считаются фиксированными; результатом вычисления является некоторая функция двух переменных $F(x, y)$;

б) интеграл $\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} F(x, y)\,dy$, где y — переменная интегрирования, а x считается фиксированным; результат вычисления — некоторая функция $G(x)$ одной переменной;

в) внешний интеграл $\int\limits_a^b G(x)\,dx$, где x — переменная интегрирования; в итоге получаем окончательный результат — некоторое действительное число.

Пример. Вычислить $I=\iiint\limits_T xyz\,dv$, где область ограничена поверхностями $z=x^2+y^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=1$ (рис. 98).

Решение. Проверим условие выпуклости области T. Так как любая прямая, проходящая через какую-либо внутреннюю точку области T параллельно одной из осей Ox, Oy или Oz, пересекает поверхность, ограничивающую данную область, только в двух точках, то это условие выполнено (рис. 98).

Составим выражение вида (10). При записи пределов интегрирования учитываем, что: а) множество точек входа в область есть поверхность параболоида вращения $z=x^2+y^2$, а множество точек выхода — плоскость $z=1$; б) множество точек входа в область Φ_{xy} есть прямая $y=0$, а множество точек выхода — дуга окружности

$y=\sqrt{1-x^2}$; в) область Φ_{xy} в направлении оси Ox изменяется в пределах от $x=0$ до $x=1$:

$$I=\iiint\limits_T xyz\,\mathrm{d}v=\int\limits_0^1\mathrm{d}x\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int\limits_{x^2+y^2}^{1}xyz\,\mathrm{d}z.$$

Вычислим повторный интеграл в соответствии с п. 3 правила:

а) $\displaystyle\int\limits_{x^2+y^2}^{1}xyz\,\mathrm{d}z=xy\,\frac{z^2}{2}\Bigg|_{x^2+y^2}^{1}=xy\left[\frac{1}{2}-\frac{(x^2+y^2)}{2}\right]=\frac{1}{2}(xy-$

$-x^5y-2x^3y^3-xy^5)$;

б) $\displaystyle\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{2}(xy-x^5y-2x^3y^3-xy^5)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left(x\,\frac{y^2}{2}-x^5\,\frac{y^2}{2}-\right.$

$\displaystyle\left.-2x^3\,\frac{y^4}{4}-x\,\frac{y^6}{6}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}\left[x\,\frac{1-x^2}{2}-x^5\,\frac{1-x^2}{2}-2x^3\,\frac{(1-x^2)^2}{4}-\right.$

$\displaystyle\left.-x\,\frac{(1-x^2)^3}{6}\right]=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\,x-x^3+\frac{x^7}{3}\right)$;

в) $\displaystyle\int\limits_0^1\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\,x-x^3+\frac{x^7}{3}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^8}{3\cdot 8}\right)\Bigg|_0^1=$

$\displaystyle=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3\cdot 8}\right)=\frac{1}{32};\ I=\frac{1}{32}.$

3°. Упражнения

Вычислите двойной интеграл от функции $z=f(x,\ y)$ по области Φ, ограниченной заданными линиями.

1. $z=36-x^2-y^2$; $x=4$, $x=-4$, $y=4$, $y=-4$.
2. $z=x^2+y^2$; $x=4$, $x=-4$, $y=4$, $y=-4$.
3. $z=1+x+y$; $x=-y$, $x=\sqrt{y}$, $y=2$.
4. $z=xy^2$; $x=0$, $y=x$, $y=2-x^2$.

Составьте выражение для вычисления тройного интеграла от функции $f(x,\ y,\ z)$ по телу T, ограниченному заданными поверхностями.

5. Плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=1$ и параболоидом вращения $z=x^2+y^2$ (в I октанте).
6. Плоскостями $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1$.
7. Плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

Вычислите тройной интеграл от функции $f(x,\ y,\ z)$ по телу T, ограниченному заданными поверхностями.

8. $f(x, y, z)=xy$; $x=0$, $y=0$, $z=1$, $z=x^2+y^2$ (в I октанте).
9. $f(x, y, z)=x+y+z$; $x=0$, $y=0$, $z=1$, $z=x^2+y^2$ (в I октанте).
10. $f(x, y, z)=xyz$; $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1$.
11. $f(x, y, z)=x+y-z$; $x=1$, $x=-1$, $y=1$, $y=-1$, $z=0$, $z=2$.
12. $f(x, y, z)=y$; $x=0$, $y=0$, $z=1$, $x+y+z=2$.

§ 6.3. Переход от декартовых координат к полярным. Замена переменных в кратных интегралах. Переход от декартовых координат к цилиндрическим и сферическим

1°. Переход от декартовых координат к полярным. Положение некоторой точки A на плоскости можно задать не только с помощью декартовых координат (x, y), но и с помощью *полярных координат* (r, φ). Совмещая начало декартовых координат с полюсом, а ось Ox — с полярной осью Op, получим зависимость между декартовыми и полярными координатами:

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi, \tag{1}$$

где r — полярный радиус $(0\leqslant r<+\infty)$, φ — полярный угол точки A $(0\leqslant\varphi<2\pi)$.

Выведем формулу перехода от декартовых координат к полярным для двойного интеграла. Пусть $f(x, y)$ — непрерывная функция на компактной фигуре, а граница Λ фигуры Φ — кусочно-гладкая замкнутая кривая. Так как предел интегральной суммы не зависит от разбиения области Φ на части Φ_k и от выбора в этих частях точек $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$, то разобьем фигуру Φ на элементарные ячейки Φ_{ij} с помощью координатных линий $r=r_j$ (окружностей) и $\varphi=\varphi_i$ (лучей). Пусть $\Delta r_j=r_{j+1}-r_j$, $\Delta\varphi_i=\varphi_{i+1}-\varphi_i$ (рис. 99). Рассматривая криволинейную фигуру Φ_{ij} как прямоугольник со сторонами $r_k\Delta\varphi_k$ и Δr_k, с точностью до бесконечно малых высшего порядка найдем площадь Δs_{ij} в полярных координатах:

$$\Delta s_{ij}\approx r_j\ \Delta\varphi_i\ \Delta r_j.$$

Выбрав в Φ_{ij} точку (x_k, y_k) (вершину ячейки) и используя формулы (1), произведем в выражении (2) § 6.1 замену координат:

$$\iint\limits_{\Phi} f(x,\ y)\,\mathrm{d}s=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k,\ y_k)\,\Delta s_k=$$

$$=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(r_k\cos\varphi_k,\ r_k\sin\varphi_k)\,r_k\,\Delta\varphi_k\,\Delta r_k=$$

$$=\iint\limits_{\Phi} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r, \tag{3}$$

где d — диаметр разбиения $\{\Phi_{ij}\}$.

Выражение $\mathrm{d}s=r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$ называется *двумерным элементом площади в полярных координатах.*

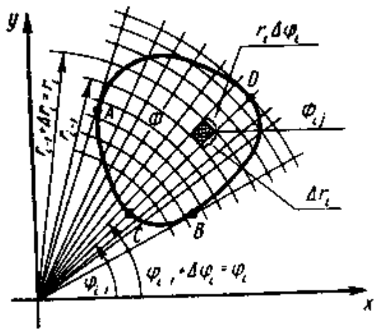


Рис. 99

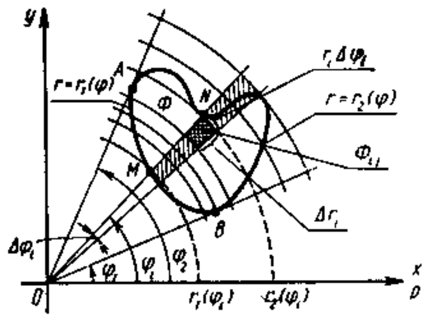


Рис. 100

Для вычисления двойного интеграла (3) его надо заменить повторным. Пусть Φ — выпуклая область относительно r (рис. 100). Это означает, что любой луч, исходящий из полюса под углом $\varphi_i (\varphi_1 < \varphi_i < \varphi_2)$ к полярной оси и проходящий через какую-либо внутреннюю точку области Φ, пересекает линию границы только в двух точках $M(r_1(\varphi_i), \varphi_i)$ и $N(r_2(\varphi_i), \varphi_i)$. Границу области Φ образуют две кривые AMB и ANB и лучи, касающиеся границы в точках A и B. Кривые заданы соответственно уравнениями $r = r_1(\varphi)$ и $r = r_2(\varphi)$ и представляют собой множество точек входа в область Φ и выхода из нее; лучи составляют с полярной осью углы φ_1 и φ_2. Для такой области Φ выражение (3) можно представить в виде повторного интеграла:

$$\iint\limits_{\Phi} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\, r\, d\varphi\, dr = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\, r\, dr. \quad (4)$$

Вычисление внутреннего интеграла в равенстве (4) соответствует суммированию в выражении (3) по частям Φ_k, примыкающим к одному и тому же лучу, который составляет фиксированный угол φ_i с полярной осью (рис. 100). Так как луч может исходить из полюса под любым углом $\varphi_i (\varphi_1 < \varphi_i < \varphi_2)$ и пересекает область Φ от кривой AMB до кривой ANB, то пределы интегрирования по r являются функциями φ, т. е. $r = r_1(\varphi)$ и $r = r_2(\varphi)$. При этом очевидно, что результат интегрирования представляет собой функцию от φ. Вычисление внешнего интеграла в равенстве (4) соответствует сложению в выражении (3) всех сумм (полученных вдоль каждого луча) по всей области Φ — от луча, исходящего из полюса под наименьшим углом φ_1, до луча, исходящего из полюса под наибольшим углом φ_2. Пределы интегрирования по φ во внешнем интеграле всегда постоянны.

Предположим, что любая окружность радиуса r_i $(r_1 < r_i < r_2)$, имеющая центр в полюсе и проходящая через какую-либо внутрен-

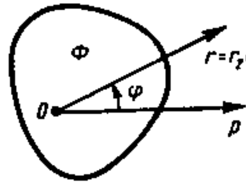
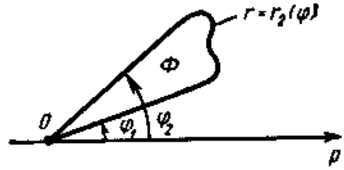


Рис. 102



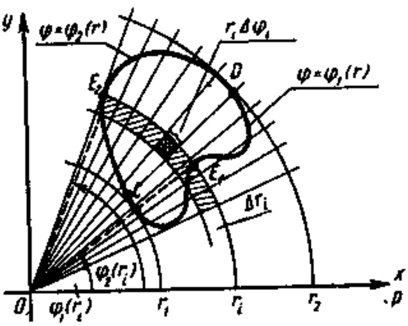


Рис. 101

Рис. 103

нюю точку области Ф, пересекает линию границы только в двух точках $E_1(r_i, \varphi_1(r_i))$ и $E_2(r_i, \varphi_2(r_i))$ (рис. 101). В этом случае фигура Ф выпукла относительно угла φ. Меняя r и φ ролями, получим выражение (3) в виде повторного интеграла:

$$\iint_\Phi f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,r\,d\varphi\,dr = \int_{r_1}^{r_2} dr \int_{\varphi_1(r)}^{\varphi_2(r)} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,r\,d\varphi. \quad (5)$$

Очевидно, что для области Ф, выпуклой как относительно r, так и относительно φ, двойной интеграл (3) можно вычислить с помощью любой из формул (4) или (5).

Формулы (4) и (5) рассмотрены для того случая, когда полюс расположен вне области Ф (рис. 100 и 101). Если полюс лежит внутри Ф и любой луч, исходящий из полюса, пересекает границу не более чем в одной точке (рис. 102), то для вычисления двойного интеграла в полярных координатах удобно воспользоваться повторным интегралом вида (4). В этом случае переменная φ изменяется от 0 до 2π, а r при фиксированном значении φ изменяется от 0 до $r=r_2(\varphi)$, где $r=r_2(\varphi)$ — полярное уравнение границы области Ф; тогда выражение (4) примет вид

$$\iint_\Phi f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,r\,d\varphi\,dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,r\,dr.$$

Если полюс лежит на границе (рис. 103), то радиус точки входа равен нулю и поэтому

$$\iint_\Phi f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,r\,d\varphi\,dr = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_0^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,r\,dr.$$

Правило вычисления двойного интеграла в полярных координатах с помощью повторного интеграла (4), (5) при замене переменных x и y на r и φ сохраняется таким же, как и при вычислении двойного интеграла в декартовых координатах (см. § 6.2).

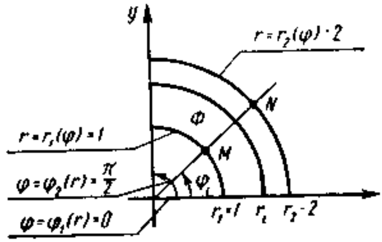


Рис. 104

Пример. Вычислить двойной интеграл $I=\iint\limits_{\Phi}(e^{x^2+y^2})\,ds$ в полярных координатах по области Φ, ограниченной линиями x^2+ $+y^2=1$, $x^2+y^2=4$, $x=0$, $y=0$ и расположенной в I квадранте (рис. 104).

Решение. Используя формулу (3), запишем двойной интеграл в полярных координатах:

$$I=\iint\limits_{\Phi} e^{x^2+y^2}\,ds=\iint\limits_{\Phi} e^{r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi}\,r\,d\varphi\,dr=\iint\limits_{\Phi} e^{r^2}\,r\,d\varphi\,dr. \qquad (*)$$

Проверим условие выпуклости фигуры Φ. Фигура выпукла как относительно r, так и относительно φ, поскольку: а) любой луч, исходящий из полюса под углом φ_i $(0<\varphi_i<\pi/2)$ к полярной оси и проходящий через какую-либо точку области Φ, пересекает ее границу только в двух точках $M(1, \varphi_i)$ и $N(2, \varphi_i)$; б) любая окружность радиуса r_i $(1<r_i<2)$, проходящая через какую-либо внутреннюю точку области Φ, пересекает границу также только в двух точках $E_1(r_i, 0)$ и $E_2(r_i, \pi/2)$.

Следовательно, интеграл (*) можно вычислить с помощью любой из формул (4) или (5). Пользуясь сначала формулой (4), получим

$$I=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} e^{r^2}\,r\,dr. \qquad (**)$$

В этом случае при интегрировании по r кривая $r=r_1(\varphi)=1$ есть множество точек входа, а кривая $r=r_2(\varphi)=2$ — множество точек выхода. Пределы интегрирования по φ во внешнем интеграле указывают границы изменения углов лучей, ограничивающих область Φ,— от луча $\varphi_1=0$ до луча $\varphi_2=\pi/2$. При вычислении по формуле (**) считаем φ фиксированным при интегрировании во внутреннем интеграле, а r фиксированным во внешнем интеграле:

$$I=\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi\int\limits_1^2 e^{r^2}\,dr=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi\int\limits_1^2 e^{r^2}\,d(r^2)=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi\left[\left(\frac{1}{2}e^{r^2}\right)\Bigg|_1^2\right]=\frac{1}{2}(e^4-e)\cdot\varphi\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}(e^4-e).$$

Таким образом,

$$I=\iint_{\Phi} e^{r^2} r\,d\varphi\,dr=\frac{\pi}{4}(e^4-e).$$

Используя теперь формулу (5) и выбирая φ в качестве переменной для внутреннего интеграла, получим

$$I=\int_{r_1}^{r_2} dr \int_{\varphi_1(r)}^{\varphi_2(r)} e^{r^2}\,d\varphi. \qquad (***)$$

В этом случае при интегрировании по φ линия $\varphi=\varphi_1(r)=0$ есть множество точек входа, а линия $\varphi=\varphi_2(r)=\pi/2$ — множество точек выхода. При вычислении по формуле (***) считаем r фиксированным при интегрировании во внутреннем интеграле, а φ фиксированным во внешнем интеграле:

$$I=\int_1^2 dr\int_0^{\pi/2} e^{r^2} r\,d\varphi=\int_1^2 dr\cdot e^{r^2} r\varphi\Big|_0^{\pi/2}=\int_1^2 e^{r^2} r\,\frac{\pi}{2}\,dr=$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_1^2 e^{r^2}\,d(r^2)=\frac{\pi}{4}e^{r^2}\Big|_1^2=\frac{\pi}{4}(e^4-e),$$

т. е. результат не изменился.

2°. Замена переменных в кратных интегралах. Ограничимся рассмотрением случая двойных интегралов. Известно, что положение некоторой фиксированной точки A на плоскости можно определить с помощью координатных линий. Если координатными линиями являются прямые, параллельные осям координат, то говорят о декартовой системе координат. Если координатные линии представляют собой лучи, исходящие из начала координат, и концентрические окружности с центром в начале координат, то говорят о полярной системе координат. Если координатными линиями служат два взаимно пересекающихся семейства кривых, то говорят о *криволинейной системе координат*.

На рис. 105—107 изображена одна и та же фиксированная точка A плоскости xOy. Положение этой точки определено с помощью разных пар взаимно пересекающихся координатных линий, уравнения которых в декартовой, полярной и криволинейной системах координат имеют соответственно вид

$$a=x,\quad b=y, \qquad (6)$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \varphi=\operatorname{arctg}(y/x), \qquad (7)$$

$$u=\varphi(x, y),\quad v=\psi(x, y). \qquad (8)$$

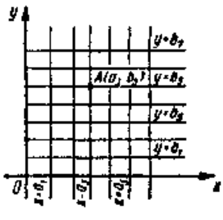


Рис. 105

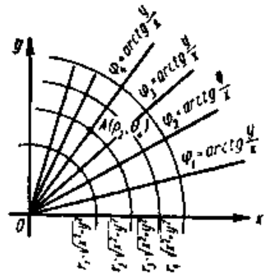


Рис. 106

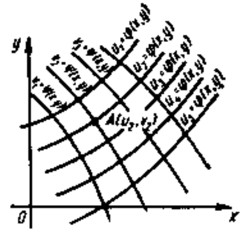


Рис. 107

Пара чисел (u, v) называется *криволинейными координатами* точки A.

Используя переход от одних координат к другим, можно значительно упростить интегрирование функций. Разрешим уравнения (8) относительно переменных x и y:

$$x=\alpha(u, v), \quad y=\beta(u, v). \tag{9}$$

Предположим теперь, что область интегрирования Φ разбита координатными линиями на криволинейные четырехугольники (рис. 108). Выделим один такой четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$ и вычислим его площадь Δs_k в криволинейных координатах (u, v). Найдем сначала координаты его вершин $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$, $A_4(x_4, y_4)$. Заменяя приращения функций дифференциалами, с точностью до бесконечно малых высших порядков по сравнению с бесконечно малыми Δu_k и Δv_k получим

$$\begin{aligned}
&x_1=\alpha(u, v),\\
&y_1=\beta(u, v);\\
&x_2=\alpha(u+\Delta u_k, v)=\alpha(u, v)+\frac{\partial\alpha(u, v)}{\partial u}\Delta u_k,\\
&y_2=\beta(u+\Delta u_k, v)=\beta(u, v)+\frac{\partial\beta(u, v)}{\partial u}\Delta u_k;\\
&x_3=\alpha(u+\Delta u_k, v+\Delta v_k)=\alpha(u, v)+\frac{\partial\alpha(u, v)}{\partial u}\Delta u_k+\frac{\partial\alpha(u, v)}{\partial v}\Delta v_k,\\
&y_3=\beta(u+\Delta u_k, v+\Delta v_k)=\beta(u, v)+\frac{\partial\beta(u, v)}{\partial u}\Delta u_k+\frac{\partial\beta(u, v)}{\partial v}\Delta v_k;\\
&x_4=\alpha(u, v+\Delta v_k)=\alpha(u, v)+\frac{\partial\alpha(u, v)}{\partial v}\Delta v_k, \qquad\qquad (10)\\
&y_4=\beta(u, v+\Delta v_k)=\beta(u, v)+\frac{\partial\beta(u, v)}{\partial v}\Delta v_k,
\end{aligned}$$

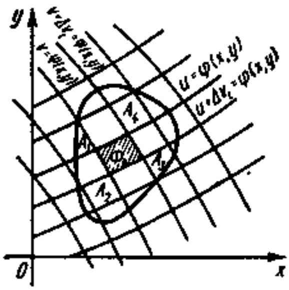


Рис. 108

где производные вычислены в точке (u, v). Из выражений (10) имеем $x_2-x_1\approx\approx x_3-x_4$, $y_2-y_1\approx y_3-y_4$, $x_4-x_1\approx x_3-x_2$, $y_4-y_1\approx y_3-y_2$, а это означает, что отрезки A_1A_2 и A_4A_3, A_1A_4 и A_2A_3 соответственно параллельны и приближенно равны. Отсюда следует, что криволинейный четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$ с точностью до бесконечно малых высших порядков является параллелограммом. Выражая удвоенную площадь треугольника $A_1A_2A_3$ через координаты его вершин, по известной формуле находим

$$\Delta s_k\approx|x_1(y_1-y_3)-y_1(x_2-x_3)+(x_2y_3-x_3y_2)|. \tag{11}$$

Соотношение (11) с учетом выражений (10) для координат x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 преобразуем к виду

$$\Delta s_k\approx\left|\frac{\partial\alpha(u,v)}{\partial u}\frac{\partial\beta(u,v)}{\partial v}-\frac{\partial\alpha(u,v)}{\partial v}\frac{\partial\beta(u,v)}{\partial u}\right|\Delta u_k\Delta v_k=$$
$$=|D(u,v)|\,\Delta u_k\Delta v_k, \tag{12}$$

где

$$D(u,v)=\frac{\partial\alpha(u,v)}{\partial u}\frac{\partial\beta(u,v)}{\partial v}-\frac{\partial\alpha(u,v)}{\partial v}\frac{\partial\beta(u,v)}{\partial u}=$$
$$=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\alpha(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial\alpha(u,v)}{\partial v}\\[2ex] \dfrac{\partial\beta(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial\beta(u,v)}{\partial v}\end{vmatrix}. \tag{13}$$

Переходя в соотношении (12) к элементу площади $\mathrm{d}s$, получим

$$\mathrm{d}s=|D(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \tag{14}$$

Определитель $D(u, v)$, выражаемый формулой (13), называется *определителем Якоби* от функций $\alpha(u, v)$ и $\beta(u, v)$ по переменным u и v (или *якобианом* преобразования координат).

Подставляя выражения (9) и (14) в $\iint\limits_{\Phi} f(x, y)\,\mathrm{d}s$, получим формулу для вычисления интеграла в криволинейных координатах:

$$\iint\limits_{\Phi} f(x,y)\,\mathrm{d}s=\iint\limits_{\Phi} f[\alpha(u,v),\ \beta(u,v)]\,|D(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Выражение $D(u, v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ называют *элементом площади в криволинейных координатах.*

В формулах (8) u и v рассматриваются как новые криволинейные координаты и сама плоскость считается неизменной. Наоборот, можно считать u и v прямоугольными координатами и тогда формулы (8) задают преобразование плоскости, при котором точка с прямоугольными координатами (x, y) преобразуется в точку с прямоугольными координатами (u, v). Такое преобразование отображает фигуру Φ в новую фигуру Φ'. В этом случае формула (15) примет вид

$$\iint\limits_{\Phi} f(x, y)\,ds = \iint\limits_{\Phi'} f(\alpha(u, v), \beta(u, v))\,du\,dv, \tag{16}$$

где u и v — прямоугольные координаты точек области Φ'. Если в равенстве (16) положить $f(x, y) = F(u, v) = 1$, то площадь фигуры Φ выразится интегралом по области Φ':

$$S = \iint\limits_{\Phi'} |D|\,du\,dv. \tag{17}$$

Отсюда видно, что значение $|D|$ в какой-либо точке из Φ' есть коэффициент изменения (искажения) площади в точке N при отображении фигуры Φ в фигуру Φ', т. е. предел отношения площади области, лежащей в Φ и содержащей образ точки N, к площади соответствующей области, лежащей в Φ' и содержащей N, при условии, что последняя область стягивается в точку N. Другими словами, абсолютная величина якобиана равна коэффициенту изменения площади.

Двойной интеграл в криволинейных координатах можно вычислить с помощью повторного интеграла. Пределы интегрирования по переменным u и v устанавливаются в соответствии с видом области интегрирования Φ; правило вычисления остается таким же, как и при вычислении двойного интеграла в декартовых или в полярных координатах.

Примером криволинейных координат u и v являются полярные координаты r и φ, с помощью которых уравнения координатных линий записаны в виде (7). Выражение для двойного интеграла в полярных координатах было получено в п. 1°. Однако к тому же выражению можно прийти, используя преобразование двойного интеграла от декартовых координат к криволинейным. Рассматривая полярные координаты в качестве криволинейных, в выражение (15) вместо (9) подставим решения уравнений (7) относительно переменных x и y: $x = \alpha(u, v) = r\cos\varphi$, $y = \beta(u, v) = r\sin\varphi$. Полагая $u = r$, $v = \varphi$, по формуле (13) вычислим якобиан

$$D(r, \varphi) = \frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial r}\,\frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial\varphi} + \frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial\varphi}\,\frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial r} =$$

$$= r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r.$$

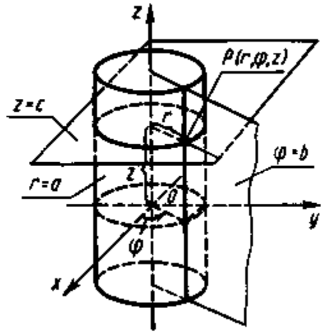


Рис. 109

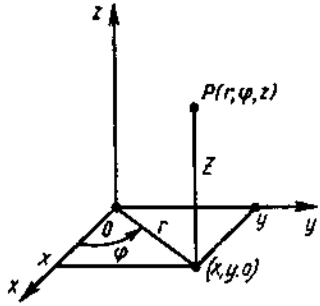


Рис. 110

Следовательно, в данном случае формула (15) дает выражение для двойного интеграла в полярных координатах:

$$\iint\limits_{\Phi} f(x,\, y)\,\mathrm{d}s = \iint\limits_{\Phi} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r,$$

которое совпадает с полученным ранее выражением (3). К этому же выражению можно прийти, если положить $u=\varphi$, $v=r$, что подчеркивает общий характер формулы (15) преобразования двойного интеграла от декартовых координат к криволинейным.

3°. Переход от декартовых координат к цилиндрическим. Аналогично тому, как положение точки на плоскости определяется с помощью двух координатных линий, положение точки в трехмерном пространстве можно определить с помощью трех координатных поверхностей. Предположим, что все трехмерное пространство как бы заполнено тремя семействами пересекающихся координатных поверхностей:

$$r=a,\ \varphi=b,\ z=c, \tag{18}$$

где a, b, c — фиксированные постоянные; $r=a$ — семейство круговых цилиндров с общей осью вращения Oz; $\varphi=b$ — семейство полуплоскостей, проходящих через ось Oz; $z=c$ — семейство плоскостей, перпендикулярных оси Oz.

Тогда любая точка трехмерного пространства является точкой пересечения трех координатных поверхностей, принадлежащих каждому из семейств и соответствующих конкретным значениям постоянных a, b, c. Например, некоторая фиксированная точка P в пространстве (рис. 109) является точкой пересечения поверхности кругового цилиндра $r=a$ (a — расстояние точки P до оси Oz), полуплоскости $\varphi=b$ (b — угол между плоскостью xOz и полуплоскостью $\varphi=b$, отсчитываемый в положительном направлении) и плоскости $z=c$ (c — расстояние от точки P до плоскости xOy).

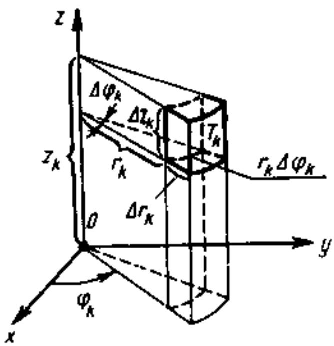


Рис. 111

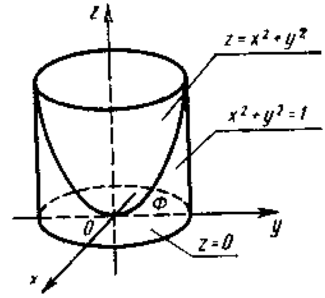


Рис. 112

Три числа (r, φ, z) называются *цилиндрическими координатами* точки P; при этом $0 \leqslant r < +\infty, \infty, 0 \leqslant \varphi < 2\pi, -\infty < z < +\infty$. Декартовы и цилиндрические координаты (рис. 110) связаны следующими формулами:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z. \tag{19}$$

Выведем формулу перехода от декартовых координат к цилиндрическим для тройного интеграла. Разобьем тело T на ячейки T_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ с помощью координатных поверхностей (18). Выделим одну из ячеек T_k (рис. 111) и найдем ее объем в цилиндрических координатах. Ячейка T_k представляет собой криволинейную призму, противоположные грани которой образованы парами координатных поверхностей из каждого семейства при соответствующих значениях цилиндрических координат: двумя круговыми цилиндрами $r = r_k$ и $r = r_k + \Delta r_k$, двумя полуплоскостями $\varphi = \varphi_k$ и $\varphi = \varphi_k + \Delta\varphi_k$, а также двумя плоскостями $z = z_k$ и $z = z_k + \Delta z_k$. С точностью до бесконечно малых высшего порядка объем криволинейной призмы T_k равен объему прямоугольного параллелепипеда с длинами ребер Δr_k, $r_k \cdot \Delta\varphi_k$ и Δz_k:

$$\Delta v_k = \Delta r_k \cdot r_k \Delta\varphi_k \cdot \Delta z_k. \tag{20}$$

Заменяя теперь в равенстве (7) § 6.1 декартовы координаты x_k, y_k, z_k на цилиндрические и используя формулы (19) и (20), получим выражение тройного интеграла в цилиндрических координатах:

$$\iiint\limits_{T} f(x, y, z)\,\mathrm{d}v = \iiint\limits_{T} F(r, \varphi, z)\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z, \tag{21}$$

где r, φ, z — переменные интегрирования; $\mathrm{d}v = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$ — элемент объема в цилиндрических координатах; $F(r, \varphi, z) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$.

Тройной интеграл (21) вычисляется с помощью повторного интеграла так же, как и в случае декартовых координат: здесь роль декартовых переменных играют переменные r, φ, z. Пределы интегрирования определяются в соответствии с видом области T в пространстве $Oxyz$ и геометрическим смыслом цилиндрических координат. Удобной формулой для вычисления интеграла (21) через повторный является следующее выражение, аналогичное выражению (10) из § 6.2:

$$\iiint_{T} F(r,\varphi,z)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left\{\int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)}\left[\int_{z_1(r,\varphi)}^{z_2(r,\varphi)}F(r,\varphi,z)\,\mathrm{d}z\right]r\,\mathrm{d}r\right\}\mathrm{d}\varphi=$$

$$=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)}\int_{z_1(r,\varphi)}^{z_2(r,\varphi)}F(r,\varphi,z)\,\mathrm{d}z\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi. \tag{22}$$

Здесь $z_1(r,\varphi)=z_1(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$, $z_2(r,\varphi)=z_2(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$, $z=z_1(r,\varphi)$, $z=z_2(r,\varphi)$ — уравнения нижней и верхней поверхностей, ограничивающих область T; $r=r_1(\varphi)$, $r=r_2(\varphi)$ — уравнения частей линии, ограничивающей область Φ_{xy}, в которую проектируется T на плоскость xOy; $\varphi=\varphi_1$, $\varphi=\varphi_2$ — уравнения лучей, исходящих из начала координат и ограничивающих границу области Φ_{xy}.

Пример. Вычислить тройной интеграл $I=\iiint_{T} xy\,\mathrm{d}v$ по области T, ограниченной плоскостью $z=0$, круговым цилиндром $x^2+y^2=1$ и параболоидом вращения $z=x^2+y^2$ (рис. 112).

Решение. Интуитивно ясно, что тройной интеграл равен нулю. Проверим это.

Используя формулу (21), заменим декартовы координаты на цилиндрические:

$$I=\iiint_{T} r\cos\varphi\, r\sin\varphi\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z.$$

Выразим этот интеграл через повторный по формуле (22). Предварительно запишем в цилиндрических координатах выражения для пределов интегрирования:

а) $z=z_1=0$, $z=z_2(x,y)=x^2+y^2=z_2(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)=r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=r^2=z_2(r,\varphi)$;

б) так как начало расположено внутри Φ_{xy}, то $r=r_1(\varphi)=0$, а $r=r_2(\varphi)$ найдем из уравнения $x^2+y^2=1$ границы области Φ_{xy}, в котором положим $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, т. е. из соотношения $r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=1$; значит, $r=r_2(\varphi)=1$;

в) $\varphi=\varphi_1=0$, $\varphi=\varphi_2=2\pi$.

Тогда

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{r^2} r^3\cos\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi.$$

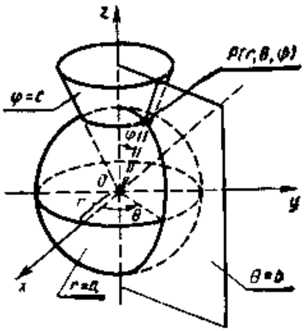


Рис. 113

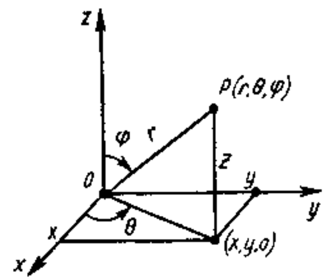


Рис. 114

Последовательно вычислим три определенных интеграла, входящих в повторный интеграл:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{r^2} r^3\cos\varphi\sin\varphi\,dz\,dr\,d\varphi=\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\cos\varphi\sin\varphi\cdot z\Big|_0^{r^2}dr\,d\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^5\frac{1}{2}\sin 2\varphi\,dr\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin 2\varphi\cdot\frac{r^6}{6}\Big|_0^1 d\varphi=0.$$

4°. Переход от декартовых координат к сферическим. Рассмотрим следующие три семейства пересекающихся координатных поверхностей в пространстве $\mathbb{R}^3$:

$$r=a,\ \theta=b,\ \varphi=c, \tag{23}$$

где a, b, c — фиксированные постоянные; $r=a$ — семейство сфер с центром в начале координат; $\theta=b$ — семейство полуплоскостей, проходящих через ось Oz; $\varphi=c$ — семейство круговых конусов с общей осью Oz.

Тогда некоторая фиксированная точка P в пространстве $\mathbb{R}^3$ (рис. 113) является точкой пересечения сферы $r=a$, полуплоскости $\theta=b$ и кругового конуса $\varphi=c$. Следовательно, положение точки P в пространстве определяется тремя числами: длиной r отрезка OP; углом θ между плоскостью xOz и полуплоскостью $\theta=b$, отсчитываемым в положительном направлении, т. е. против часовой стрелки; углом φ между положительным направлением оси Oz и отрезком OP. Три числа (r, φ, θ), определяющие положение точки в пространстве, называются *сферическими координатами* точки P: при этом $0\leqslant r<+\infty$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$, $0\leqslant\theta<2\pi$.

Декартовы и сферические координаты (рис. 114) связаны следующими формулами:

$$x=r\sin\varphi\cos\theta,\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\ z=r\cos\varphi. \tag{24}$$

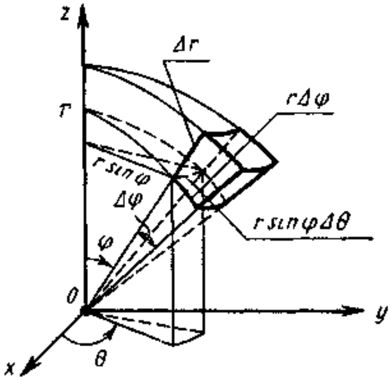


Рис. 115

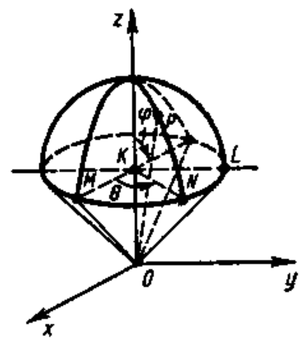


Рис. 116

Выведем формулу перехода от декартовых координат к сферическим для тройного интеграла. С помощью координатных поверхностей (23), проведенных через малые промежутки Δr, $\Delta\varphi$ и $\Delta\theta$, разобьем тело T на ячейки T_k $(k=1, 2, \ldots, n)$. Выделим одну из ячеек и с точностью до бесконечно малых высшего порядка примем ее за прямоугольный параллелепипед с длинами ребер Δr, $r\sin\varphi\Delta\theta$ и $r\Delta\theta$ (рис. 115). Объем этой ячейки T_k, выраженный в сферических координатах, составит

$$\Delta v_k = r^2 \sin\varphi\cdot\Delta r\cdot\Delta\varphi\cdot\Delta\theta. \qquad (25)$$

Заменяя в равенстве (7) § 6.1 декартовы координаты x_k, y_k, z_k на сферические и используя формулы (24) и (25), получим выражение тройного интеграла в сферических координатах:

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)\,dv = \iiint\limits_T F(r, \varphi, \theta)\, r^2\sin\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi, \qquad (26)$$

где r, φ, θ — переменные интегрирования, $dv = r^2\sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta$ — элемент объема в сферических координатах, $F(r, \varphi, \theta) = f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)$.

Тройной интеграл (26) вычисляется с помощью повторного по формуле

$$\iiint\limits_T = F(r, \varphi, \theta)\, r^2 \sin\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \left\{ \int\limits_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} \left[\int\limits_{r_1(\theta,\varphi)}^{r_2(\theta,\varphi)} F(r, \varphi, \theta)\, r^2\, dr \right] \sin\varphi\, d\varphi \right\} d\theta =$$

$$= \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \int\limits_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} \int\limits_{r_1(\theta,\varphi)}^{r_2(\theta,\varphi)} F(r, \varphi, \theta)\, r^2\, dr \sin\varphi\, d\theta\, d\varphi. \qquad (27)$$

Пределы интегрирования устанавливаются в соответствии с видом области Т в пространстве $Oxyz$ и геометрическим смыслом сферических координат.

Пример. Вычислить тройной интеграл $I=\iiint\limits_T (x^2+y^2)\,dv$ по области Т, ограниченной сверху полусферой радиуса R, а снизу — конусом с высотой, равной радиусу основания $OK=KL=R$ (рис. 116).

Решение. Введем сферические координаты: $OP=r$, $\angle KOP=\varphi$, $\angle MKN=\theta$. Пределы интегрирования по этим координатам таковы: $r=r_1(\theta,\varphi)=0$, $r=r_2(\theta,\ \varphi)=2R\cos\theta$; $\theta=\theta_1(\varphi)=0$, $\theta=\theta_2(\varphi)=\pi/4$; $\varphi=\varphi_1=0$, $\varphi=\varphi_2=2\pi$.

Используя формулу (26), заменим декартовы координаты на сферические:

$$I=\iiint\limits_T (r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta)\,r^2\sin\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi=$$

$$=\iiint\limits_T r^4\sin^3\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi.$$

Выразим этот интеграл через повторный по формуле (27):

$$I=\int\limits_0^{2\pi}\left[\int\limits_0^{\pi/4}\left(\int\limits_0^{2R\cos\theta} r^4\,dr\right)\sin^3\varphi\,d\varphi\right]d\theta=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left[\int\limits_0^{\pi/4}\frac{32R^5\cos^5\varphi}{5}\sin^3\varphi\,d\varphi\right]d\theta=$$

$$=\frac{32R^5}{5}\int\limits_0^{2\pi}\left[\int\limits_0^{\pi/4}\cos^5\varphi(1-\cos^2\varphi)\,d(-\cos\varphi)\right]d\theta=\frac{11}{30}\pi R^5.$$

5°. Упражнения

Вычислите двойной интеграл в полярных координатах от функции $z=f(x,y)$ по области Φ:

1. $z=e^{-x^2-y^2}$; Φ — круг $x^2+y^2\leqslant a^2$.
2. $z=1/\sqrt{x^2+y^2}$; Φ — круговое кольцо $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$.
3. $z=r\sin\varphi$; Φ — круговой сектор $r\leqslant a$, ограниченный линиями $r=a$, $\varphi=\pi/2$, $\varphi=\pi$.
4. $z=r\sin\varphi$; Φ — полукруг $r\leqslant 2a\cos\varphi$, ограниченный линиями $r=2a\cos\varphi$, $\varphi=0$, $\varphi=\pi/2$.
5. $z=r^2$; Φ — круговое кольцо $a\leqslant r\leqslant 2a$.

Вычислите тройной интеграл $\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dv$ в цилиндрических координатах:

6. $f(x, y, z)=1$; T — область, ограниченная плоскостью $z=1$ и параболоидом вращения $z=x^2+y^2$.

7. $f(x, y, z)=y$; T — область, ограниченная плоскостью $y=h$ и конической поверхностью $y=\sqrt{x^2+z^2}$.

8. $f(x, y, z)=z\sqrt{x^2+y^2}$, T — область, ограниченная плоскостями $z=0$ и $z=a$ и круговым цилиндром $y^2+x^2=2x$.

Вычислите тройной интеграл $\iiint\limits_T f(x, y, z)\,\mathrm{d}v$ в сферических координатах:

9. $f(x, y, z)=x^2$; T — шар радиуса R с центром в начале координат.

10. $f(x, y, z)=z$; T — верхняя половина шара радиуса R с центром в начале координат.

11. $f(x, y, z)=x^2+y^2$; T — верхняя половина шара радиуса R с центром в начале координат.

§ 6.4. Применение кратных интегралов для вычисления объемов и площадей, для решения задач механики

1°. Применение двойных интегралов. Двойные интегралы применяются для вычисления площадей плоских фигур и поверхностей, объемов пространственных тел, механических величин, связанных с непрерывным распределением массы в плоской области, а также для решения многих других задач.

Как известно (см. § 6.1), площадь S плоской фигуры вычисляется по формуле

$$S=\iint\limits_{\Phi} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{1}$$

а объем V цилиндроида T — по формуле

$$V=\iint\limits_{\Phi} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{2}$$

где Ф — нижнее основание цилиндроида, $z=f(x, y)$ — уравнение поверхности, ограничивающей цилиндроид сверху.

Примеры. 1. Найти площадь параболического сегмента, ограниченного снизу отрезком прямой $y=x$, а сверху — дугой параболы $y=2-x^2$ (рис. 117).

Решение. Решая совместно уравнения линий $y=2-x^2$ и $y=x$, найдем абсциссы их точек пересечения A и B; имеем $x=2-x^2$, $x^2+x-2=0$, $x_1=-2$, $x_2=1$.

Используя формулу (1), находим

$$S=\iint\limits_{\Phi} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int\limits_a^b [y_2(x)-y_1(x)]\,\mathrm{d}x=$$

$$=\int\limits_{-2}^{1} (2-x^2-x)\,\mathrm{d}x=\left(2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1}=\frac{9}{2}\,.$$

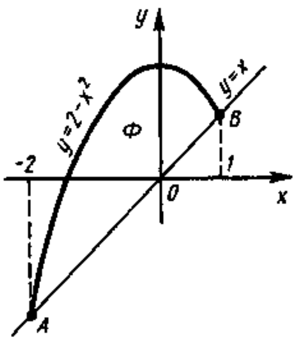


Рис. 117

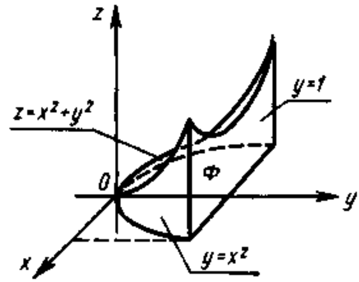


Рис. 118

2. Найти объем V цилиндроида, ограниченного параболоидом $z=x^2+y^2$, цилиндром $y=x^2$ и плоскостями $y=1$ и $z=0$ (рис. 118).

Решение. По формуле (2) находим

$$V=\iint\limits_{\Phi} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Phi}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}s=\int\limits_{-1}^{1}\left[\int\limits_{x^2}^{1}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=$$

$$=\int\limits_{-1}^{1}\left[\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{x^2}^{1}\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}\left(x^2+\frac{1}{3}-x^4-\frac{x^6}{3}\right)\mathrm{d}x=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x}{3}-\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7\cdot 3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{88}{105}.$$

С помощью двойных интегралов можно вычислить механические величины: массу m, статические моменты S_x и S_y и моменты инерции J_x и J_y относительно взаимно перпендикулярных осей, координаты центра тяжести x_c и y_c плоской фигуры Φ. При этом считается известной плотность $\rho=\rho(x, y)$ распределения массы плоской фигуры.

Масса m фигуры Φ вычисляется по формуле (7) § 6.1:

$$m=\iint\limits_{\Phi}\rho(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \qquad (3)$$

Для вычисления статических моментов S_x и S_y, моментов инерции J_x и J_y относительно взаимно перпендикулярных осей, координат центра тяжести x_c и y_c плоской фигуры предположим, что масса m_k каждой части Φ_i сосредоточена в точке $M_k(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$. Тем самым плоская фигура заменяется системой материальных точек $M_k(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$ $(k=1, 2, \dots, n)$, масса которой равна массе данной фигуры. При этом значения величин S_x, S_y, J_x, J_y, x_c, y_c для плоской фигуры приближенно равны значениям соответствующих величин для системы материальных точек:

$$S_x \approx \sum_{k=1}^{n} \overline{y}_k m_k \approx \sum_{k=1}^{n} \overline{y}_k \rho(\overline{x}_k, \overline{y}_k)\Delta s_k,$$

$$S_y \approx \sum_{k=1}^{n} \overline{x}_k m_k \approx \sum_{k=1}^{n} \overline{x}_k \rho(\overline{x}_k, \overline{y}_k)\Delta s_k,$$

$$J_x \approx \sum_{k=1}^{n} \overline{y}_k^2 m_k \approx \sum_{k=1}^{n} \overline{y}_k^2 \rho(\overline{x}_k, \overline{y}_k)\Delta s_k,$$

$$J_y \approx \sum_{k=1}^{n} \overline{x}_k^2 m_k \approx \sum_{k=1}^{n} \overline{x}_k^2 \rho(\overline{x}_k, \overline{y}_k)\Delta s_k,$$

$$x_c \approx \frac{\sum_{k=1}^{n} \overline{x}_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k} \approx \frac{\sum_{k=1}^{n} \overline{x}_k \rho(\overline{x}_k, \overline{y}_k)\Delta s_k}{\sum_{k=1}^{n} \rho(\overline{x}_k, \overline{y}_k)\Delta s_k},$$

$$y_c \approx \frac{\sum_{k=1}^{n} \overline{y}_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k} \approx \frac{\sum_{k=1}^{n} \overline{y}_k \rho(\overline{x}_k, \overline{y}_k)\Delta s_k}{\sum_{k=1}^{n} \rho(\overline{x}_k, \overline{y}_k)\Delta s_k}.$$

Так как правые части записанных соотношений являются двумерными интегральными суммами для соответствующих функций, то при стремлении к нулю диаметра разбиения $\{\Phi_k\}$ получим искомые значения вычисляемых величин:

$$S_x = \iint_{\Phi} y\rho(x, y)\,\mathrm{d}s, \quad S_y = \iint_{\Phi} x\rho(x, y)\,\mathrm{d}s, \tag{4}$$

$$J_x = \iint_{\Phi} y^2\rho(x, y)\,\mathrm{d}s, \quad J_y = \iint_{\Phi} x^2\rho(x, y)\,\mathrm{d}s, \tag{5}$$

$$x_c = \frac{\iint_{\Phi} x\rho(x, y)\,\mathrm{d}s}{\iint_{\Phi} \rho(x, y)\,\mathrm{d}s} = \frac{S_y}{m}, \quad y_c = \frac{\iint_{\Phi} y\rho(x, y)\,\mathrm{d}s}{\iint_{\Phi} \beta(x, y)\,\mathrm{d}s} = \frac{S_x}{m}. \tag{6}$$

Пример 3. Найти координаты центра тяжести x_c и y_c материального равнобедренного треугольника, если плотность распределения массы равна $\rho(x, y) = y$ (рис. 119).

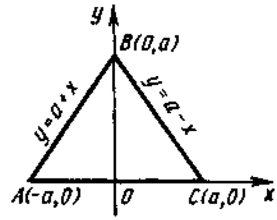


Рис. 119

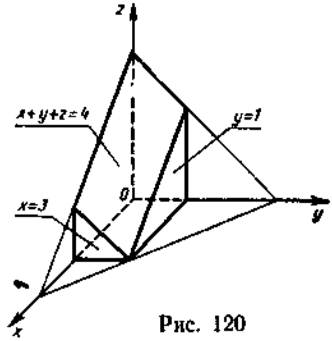


Рис. 120

Решение. Последовательно применяя формулы (3), (4) и (6), получим

$$m=\iint_{\Phi}\rho(x,\,y)\,\mathrm{d}s=\iint_{\Phi}y\,\mathrm{d}s=\int_0^a\left[\int_{y-a}^{a-y}y\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=\frac{a^3}{3},$$

$$S_y=\iint_{\Phi}x\rho(x,\,y)\,\mathrm{d}s=\iint_{\Phi}xy\,\mathrm{d}s=\int_0^a\left[\int_{y-a}^{a-y}xy\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=0,$$

$$S_x=\iint_{\Phi}y\rho(x,\,y)\,\mathrm{d}s=\iint_{\Phi}y^2\,\mathrm{d}s=\int_0^a\left[\int_{y-a}^{a-y}y^2\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=\frac{a^4}{6},$$

$$x_c=\frac{S_y}{m}=\frac{0}{a^3/3}=0,\quad y_c=\frac{S_x}{m}=\frac{a^4/6}{a^3/3}=a/2.$$

2°. Применение тройных интегралов. Тройные интегралы применяются для вычисления объемов тел и механических величин, связанных с непрерывным распределением массы в пространственной области, а также для решения многих других задач.

Как известно (см. п. 4° § 6.1), объем V пространственного тела Т вычисляется по формуле

$$V=\iiint_{\mathrm{T}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z. \tag{7}$$

Пример. Найти объем тела, ограниченного плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=3$, $y=1$, $x+y+z=4$ (рис. 120).

Решение. Для вычисления объема применим формулу (7):

$$V=\iiint_{\mathrm{T}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_a^b\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=$$

$$=\int_0^3\left[\int_0^1(4-x-y-0)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=6.$$

С помощью тройных интегралов можно вычислить следующие механические величины: массу m, статические моменты S_{xy}, S_{yz}, S_{zx} относительно координатных плоскостей, моменты инерции J_x, J_y, J_z относительно координатных осей, моменты инерции J_{xy}, J_{yz}, J_{yx} относительно координатных плоскостей, координаты центра тяжести x_c, y_c, z_c тела Т. Пусть $\rho=\rho(x, y, z)$ — непрерывная функция, обозначающая распределение массы в теле Т. Тогда масса материального тела Т вычисляется по формуле (11) § 6.1:

$$m=\iiint\limits_{T} \rho(x, y, z)\,dv. \tag{8}$$

Как и в случае плоской фигуры Ф, проводя аналогичные рассуждения, получим следующие формулы:

$$S_{xy}=\iiint\limits_{T} z\rho(x, y, z)\,dv, \quad S_{yz}=\iiint\limits_{T} x\rho(x, y, z)\,dv,$$
$$S_{zx}=\iiint\limits_{T} y\rho(x, y, z)\,dv; \tag{9}$$

$$J_x=\iiint\limits_{T} (y^2+z^2)\rho(x, y, z)\,dv, \quad J_y=\iiint\limits_{T} (x^2+y^2)\rho(x, y, z)\,dv,$$
$$J_z=\iiint\limits_{T} (x^2+y^2)\rho(x, y, z)\,dv; \tag{10}$$

$$J_{xy}=\iiint\limits_{T} z^2\rho(x, y, z)\,dv, \quad J_{yz}=\iiint\limits_{T} x^2\rho(x, y, z)\,dv,$$
$$J_{zx}=\iiint\limits_{T} y^2\rho(x, y, z)\,dv; \tag{11}$$

$$x_c=\frac{\iiint\limits_{T} x\rho(x, y, z)\,dv}{\iiint\limits_{T} \rho(x, y, z)\,dv}=\frac{S_{zy}}{m}, \quad y_c=\frac{\iiint\limits_{T} y\rho(x, y, z)\,dv}{\iiint\limits_{T} \rho(x, y, z)\,dv}=\frac{S_{zx}}{m}, \tag{12}$$

$$z_c=\frac{\iiint\limits_{T} z\rho(x, y, z)\,dv}{\iiint\limits_{T} \rho(x, y, z)\,dv}=\frac{S_{xy}}{m}.$$

3°. Упражнения

1. Вычислите массу дуги материальной кривой $y=\ln x$ между точками с абсциссами $x=1$ и $x=2$, если плотность $\rho=x^2$.

2. Найдите координаты центра тяжести материального сегмента параболы $y^2=5x$, отсеченного прямой $x=5$.

3. Вычислите момент инерции однородного материального круга радиуса r относительно центра, если масса единицы площади круга равна δ.

4. Вычислите момент инерции круглого материального однородного цилиндра, радиус основания которого R, а масса равна M.

5. Найдите координаты центра тяжести материального шара $x^2+y^2+z^2 \leqslant 2Rz$, если его плотность в любой точке равна квадрату расстояния этой точки от начала координат.

Глава VII

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 7.1. Определение криволинейных интегралов первого и второго рода, их основные свойства и вычисление. Геометрические и физические приложения. Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода. Формула Грина

1°. Криволинейный интеграл первого рода и его физический смысл. К понятию криволинейного интеграла первого рода приводят многие физические задачи, например задача о вычислении массы материальной кривой. Предположим, что на некоторой спрямляемой пространственной кривой AB масса распределена непрерывно. Будем называть *средней плотностью* дуги этой материальной кривой отношение ее массы к длине, а *плотностью* материальной кривой в данной точке — предел средней плотности малой дуги, стягивающейся в указанную точку.

Найдем массу m материальной кривой AB, если известна плотность кривой в каждой ее точке M, т. е. $\rho=\rho(M)$, где $\rho(M)$ — заданная непрерывная функция от M. Рассмотрим разбиение $\{M_k\}$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ кривой AB с помощью n точек, образующих n дуг $M_0M_1, \ldots, M_{n-1}M_n$ (рис. 121). Наибольшую из длин дуг разбиения кривой AB обозначим через d и назовем диаметром этого разбиения. Если диаметр d разбиения $\{M_k\}$ стремится к нулю, то число дуг неограниченно увеличивается. На каждой из дуг $M_{k-1}M_k$ произвольно выберем точку $\bar{N}_k(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$ и вычислим в ней плотность кривой $\rho_k=\rho(\bar{N}_k)$. Если предположить, что плотность кривой во всех точках каждого участка постоянна и равна ее значению в точке $\bar{N}_k$, то масса каждой дуги приближенно равна произведению $m_k\approx\rho(\bar{N}_k)\cdot\Delta l_k$, где Δl_k — длина дуги $M_{k-1}M_k$. Суммируя массы

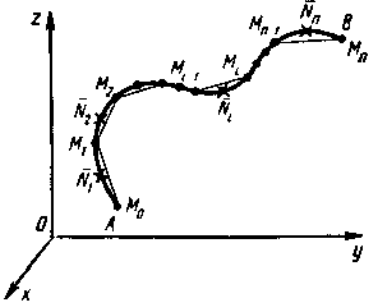


Рис. 121

всех дуг разбиения, получим приближенное значение массы m кривой AB:

$$m \approx \sum_{k=1}^{n} \rho(\overline{N}_k)\Delta l_k. \qquad (1)$$

Так как функция $\rho(\bar N)$ непрерывна, то чем «мельче» разбиение кривой AB, тем точнее равенство (1). Массой материальной кривой называется предел правой части этого равенства при стремлении диаметра d разбиения к нулю, т. е.

$$m = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} \rho(\overline{N}_k)\Delta l_k. \qquad (2)$$

Отвлечемся от конкретного содержания задачи и последовательно повторим все операции, выполненные при составлении правой части равенства (2). Рассмотрим в пространстве $Oxyz$ некоторую гладкую кривую AB, в каждой точке которой задана функция $f(x, y, z)$ (рис. 121). Рассмотрим разбиение $\{M_k\}$ кривой AB с помощью n точек и выберем в каждой дуге разбиения точку $\bar N_k(\bar x_k, \bar y_k, \bar z_k)$; эти точки будем называть отмеченными. Определим значения функции f в отмеченных точках и составим сумму парных произведений

$$\omega_n = \sum_{k=1}^{n} f(\bar x_k, \bar y_k, \bar z_k)\Delta l_k. \qquad (3)$$

Суммы вида (3) называются (криволинейными) *интегральными суммами первого рода* для функции $f(x, y, z)$, соответствующими разбиению $\{M_k\}$ кривой AB с отмеченными точками $\bar N_k$ $(k=1, \ldots, n)$. Число I называется *пределом интегральных сумм* (3) при $d\to 0$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что $|\omega_n - I| < \varepsilon$, как только $d<\delta$ (независимо от выбора отмеченных точек).

Определение 1. Предел интегральных сумм (3) при $d\to 0$ (если он существует) называется *криволинейным интегралом первого рода* от функции $f(x, y, z)$ по кривой AB и обозначается $\int\limits_{AB} f(x, y, z)\,dl$ или $\int\limits_{\Lambda} f(x, y, z)\,dl$ (где Λ — обозначение кривой AB). Таким образом,

$$\int\limits_{\Lambda} f(x, y, z)\,dl = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\overline{N}_k)\Delta l_k. \qquad (4)$$

Комментарии к определению 1. 1) Если кривая AB лежит в плоскости xOy и функция f не зависит от координаты z, то криволинейный интеграл примет вид $\int\limits_{AB} f(x, y)\,\mathrm{d}l$.

2) Из определения криволинейного интеграла первого рода следует, что он не зависит от направления кривой AB. В самом деле, длина дуги Δl_k не зависит от того, какая из точек M_{k-1} и M_k принята за начало и какая — за конец дуги.

Из соотношения (2) заключаем, что масса m материальной кривой AB, имеющей плотность $\rho(x, y, z)$, равна криволинейному интегралу от $\rho(x, y, z)$ по кривой AB, т. е.

$$m = \int\limits_{AB} \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}l \tag{5}$$

(физический смысл криволинейного интеграла первого рода).

2°. Свойства криволинейного интеграла первого рода. Перечислим следующие свойства, доказательство которых аналогично доказательству соответствующих свойств определенного интеграла (см. п. 4° § 2.1).

1°. Аддитивность. *Если дуга AB составлена из двух дуг AC и CB и для $f(x, y, z)$ существует криволинейный интеграл по дуге AB, то для $f(x, y, z)$ существуют криволинейные интегралы по дугам AC и CB, причем*

$$\int\limits_{AB} f(x, y, z)\,\mathrm{d}l = \int\limits_{AC} f(x, y, z)\,dl + \int\limits_{CB} f(x, y, z)\,\mathrm{d}l. \tag{6}$$

2°. Линейность. *Если для функций $f_1(x, y, z)$, $f_2(x, y, z)$ существуют криволинейные интегралы по дуге AB, то для функции $c_1f_1(x, y, z) + c_2f_2(x, y, z)$ также существует криволинейный интеграл по дуге AB, причем*

$$\int\limits_{AB} [c_1f_1(x, y, z) + c_2f_2(x, y, z)]\,\mathrm{d}l =$$

$$= c_1 \int\limits_{AB} f_1(x, y, z)\,\mathrm{d}l + c_2 \int\limits_{AB} f_2(x, y, z)\,\mathrm{d}l, \tag{7}$$

где c_1 и c_2 — любые вещественные числа.

Частными случаями формулы (7) являются следующие формулы:

$$\int\limits_{AB} [f_1(x, y, z) + f_2(x, y, z)]\,\mathrm{d}l = \int\limits_{AB} f_1(x, y, z)\,\mathrm{d}l + \int\limits_{AB} f_2(x, y, z)\,\mathrm{d}l,$$

$$\int\limits_{AB} cf(x, y, z)\,\mathrm{d}l = c\int\limits_{AB} f(x, y, z)\,\mathrm{d}l.$$

3°. Оценка абсолютной величины интеграла. *Если существует криволинейный интеграл по дуге AB от функции $f(x, y, z)$, то существует и криволинейный интеграл по дуге AB от функции $|f(x, y, z)|$, причем*

$$\left|\int\limits_{AB} f(x, y, z)\,dl\right| \leqslant \int\limits_{AB} |f(x, y, z)|\,dl. \tag{8}$$

4°. Теорема о среднем значении. *Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна вдоль дуги AB, то на этой дуге найдется такая точка Q, что*

$$\int\limits_{AB} f(x, y, z)\,dl = f(Q)\cdot L, \tag{9}$$

где L — длина дуги AB.

3°. Вычисление криволинейных интегралов первого рода. Вычисление интеграла $\int\limits_{AB} f(x, y)\,dl$ сводится к вычислению некоторого определенного интеграла. Пусть параметрические уравнения плоской гладкой кривой AB имеют вид $x=x(t)$, $y=y(t)$, причем существуют непрерывные производные x'_t, y'_t. Предположим, что параметр t изменяется от a до b $(a<b)$. Тогда $dl=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt$, а криволинейный интеграл выражается через определенный интеграл по формуле

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\,dl = \int\limits_a^b f(x(t),\ y(t))\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt. \tag{10}$$

В частности, если гладкая кривая AB задана явным уравнением $y=y(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$, то

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\,dl = \int\limits_a^b f(x, y(x))\sqrt{1+y_x'^2}\,dx. \tag{11}$$

Рассмотрим теперь случай пространственной кривой. Пусть параметрические уравнения пространственной гладкой кривой AB имеют вид $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, причем существуют непрерывные производные x'_t, y'_t, z'_t. Предположим, что параметр t изменяется от a до b $(a<b)$. Тогда справедлива формула, аналогичная формуле (10), т. е.

$$\int\limits_{AB} f(x, y, z)\,dl = \int\limits_a^b f(x(t),\ y(t),\ z(t))\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}\,dt. \tag{12}$$

Из соотношений (10)—(12) следует, что криволинейные интегралы первого рода заведомо существуют, если f — непрерывная функция на AB.

Примеры. 1. Вычислить $I=\int\limits_{AB} x^2\,\mathrm{d}l$ по дуге плоской кривой $y=\ln x$ при $1\leqslant x\leqslant 2$.

Решение. Используя формулу (11), получим

$$I=\int\limits_1^2 x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_1^2 (1+x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}(1+x^2)=$$

$$=\frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}\Big|_1^2=\frac{1}{3}(5^{3/2}-2^{3/2}).$$

2. Вычислить $I=\int\limits_{AB}(x+y+z)\,\mathrm{d}l$ по дуге витка винтовой линии, заданной параметрическими уравнениями $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=t$, при $0\leqslant t\leqslant\pi/2$.

Решение. По формуле (12) находим

$$I=\int\limits_0^{\pi/2}(\cos t+\sin t+t)\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+1}\,\mathrm{d}t=$$

$$=\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi/2}(\cos t+\sin t+t)\,\mathrm{d}t=$$

$$=\sqrt{2}\left[\sin t\Big|_0^{\pi/2}+(-\cos t)\Big|_0^{\pi/2}+\frac{t^2}{2}\Big|_0^{\pi/2}\right]=\sqrt{2}\left(2+\frac{\pi^2}{8}\right).$$

4°. Криволинейный интеграл второго рода и его механический смысл. Предположим, что при движении по кривой AB материальная точка M переходит из положения A в положение B. Во время движения на точку M действует сила $\vec{F}=\vec{F}(x,\,y,\,z)$, заданная своими проекциями P, Q, R на координатные оси. т. е.

$$\vec{F}=P(x,\,y,\,z)\vec{i}+Q(x,\,y,\,z)\vec{j}+R(x,\,y,\,z)\vec{k}. \tag{13}$$

Найдем работу W силы $\vec{F}$ на перемещении $\overrightarrow{AB}$.

Если перемещение точки было бы прямолинейным, а действующая сила $\vec{F}$ — постоянной (по величине и направлению), то работа W этой силы, согласно известной из физики формуле, была бы равна скалярному произведению вектора $\vec{F}$ на вектор перемещения $\vec{G}$, т. е. $W=(\vec{F},\,\vec{G})$. Однако особенность задачи состоит в том, что перемещение точки является криволинейным, а действующая сила — переменной.

С помощью точек $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n$, где M_0 совпадает с точкой A, а M_n — с точкой B, разобьем кривую AB на n дуг (ячеек) и обозначим диаметр разбиения (т. е. длину наибольшей дуги) через d.

На каждой дуге выберем произвольно точку $(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$ и найдем в ней значение силы $\vec{F}_k = (P_k, Q_k, R_k)$, где $P_k = P(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$, $Q_k = Q(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$, $R_k = R(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$. Предположим, что сила сохраняется постоянной в точках дуги и под ее действием точка перемещается не по дуге, а по хорде этой дуги. Используя формулу для вычисления скалярного произведения через проекции силы и вектора перемещения, получим приближенное значение работы на каждой дуге: $W_k \approx P(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)\Delta x_k + Q(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)\Delta y_k + R(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)\Delta z_k$, где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$, $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ — проекции k-й хорды, x_k, y_k, z_k — координаты точки M_k.

Суммируя полученные частичные работы, найдем приближенно полную работу силы $\vec{F}$ вдоль кривой AB:

$$W \approx \sum_{k=1}^{n} [P(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)\Delta x_k + Q(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)\Delta y_k + R(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)\Delta z_k]. \quad (14)$$

За работу W силы $\vec{F}$ при перемещении материальной точки вдоль кривой AB примем предел суммы (14) при стремлении диаметра разбиения к нулю, т. е.

$$W = \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} [P(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)\Delta x_k + Q(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)\Delta y_k + R(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)\Delta z_k]. \quad (15)$$

Перейдем теперь к понятию криволинейного интеграла второго рода. Пусть в пространстве $Oxyz$ заданы направленная гладкая кривая AB и функция $P(x, y, z)$ на этой кривой. С помощью точек $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$ в направлении от A к B разобьем кривую на n дуг произвольной длины, на каждой дуге $M_{k-1}M_k$ выберем произвольную точку $(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$ и найдем в ней значение $P(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$ функции P. Для каждой дуги вычислим произведение $P(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)\Delta x_k$, где Δx_k — проекция дуги на ось Ox.

При этом под проекцией дуги на ось Ox будем понимать проекцию хорды этой дуги на ось Ox, т. е. $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, где x_k и x_{k-1} — абсциссы соответственно конца и начала k-й хорды. Просуммируем полученные произведения:

$$\omega_n = \sum_{k=1}^{n} P(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)\Delta x_k. \quad (16)$$

Суммы вида (16) называются (криволинейными) *интегральными суммами второго рода* для функции $P(x, y, z)$, соответствующими разбиению $\{M_k\}$ кривой AB (относительно координаты x) с отмеченными точками $(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$. Определение предела интегральных сумм (16) аналогично определению предела для сумм вида (3).

Определение 2. Предел интегральных сумм (16) при $d \to 0$ (если он существует) называется *криволинейным интегралом второго рода* по координате x и обозначается $\int\limits_{\breve{AB}} P(x, y, z)\,dx$.

Аналогично определяются криволинейные интегралы по координатам y и z; их обозначают $\int\limits_{\breve{AB}} Q(x, y, z)\,dy$ и $\int\limits_{\breve{AB}} R(x, y, z)\,dz$.

Определение 3. Сумма трех интегралов $\int\limits_{\breve{AB}} P(x, y, z)\,dx$, $\int\limits_{\breve{AB}} Q(x, y, z)\,dy$, $\int\limits_{\breve{AB}} R(x, y, z)\,dz$ называется *общим криволинейным интегралом второго рода* и обозначается

$$\int\limits_{\breve{AB}} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz. \qquad (17)$$

Если P, Q, R — проекции силы $\vec{F}$ на координатные оси, то из соотношения (15) следует, что общий криволинейный интеграл второго рода выражает работу этой силы на пути AB (физический смысл криволинейного интеграла второго рода).

Комментарии к определениям 2 и 3. 1) Если кривая AB лежит в плоскости xOy и функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ не зависят от z, то криволинейные интегралы примут вид $\int\limits_{\breve{AB}} P(x, y)\,dx$, $\int\limits_{\breve{AB}} Q(x, y)\,dy$, $\int\limits_{\breve{AB}} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$.

2) Если кривая лежит в плоскости $x = c$, то $dx = 0$ и, следовательно, $\int\limits_{\breve{AB}} P(x, y, z)\,dx = 0$.

3) Из структуры интегральной суммы (16) следует, что криволинейный интеграл второго рода меняет свое значение на противоположное при изменении направления кривой AB, т. е.

$$\int\limits_{\breve{AB}} P(x, y, z)\,dx = -\int\limits_{\breve{BA}} P(x, y, z)\,dx. \qquad (18)$$

В самом деле, если изменить направление кривой, то изменятся знаки проекций Δx_i в сумме (16), а значит, сама сумма и ее предел изменят знак.

4) Криволинейный интеграл второго рода обладает всеми свойствами криволинейного интеграла первого рода, за исключением одного: при изменении направления кривой интеграл меняет знак.

5) В случае, когда кривая AB — замкнутая (т. е. точка B совпадает с точкой A), будем считать, что в интеграле вида (17) замкнутый контур AB всегда обходится в положительном направле-

нии, при котором область, лежащая внутри этого контура, остается по левую сторону по отношению к точке, совершающей обход.

6) Для обозначения криволинейного интеграла по замкнутой линии Λ часто употребляется также символ $\oint\limits_{\Lambda} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$.

5⁰. Вычисление криволинейных интегралов второго рода. Пусть гладкая кривая AB задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, причем изменению t от a до b соответствует движение по кривой AB от A до B. Здесь не обязательно, чтобы a было меньше b. Тогда интеграл $\int\limits_{AB} P(x, y, z)\,\mathrm{d}x$ выражается через определенный интеграл по формуле

$$\int\limits_{AB} P(x, y, z)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{a}^{b} P(x(t), y(t), z(t))\,x'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{19}$$

Аналогичные формулы имеют место и для интегралов по координатам y и z. Выпишем формулу для вычисления общего интеграла второго рода:

$$\int\limits_{AB} P(x, y, z)\mathrm{d}x+Q(x, y, z)\mathrm{d}y+R(x, y, z)\mathrm{d}z= \tag{19}$$

$$=\int\limits_{a}^{b}[P(x(t), y(t), z(t))\,x'(t)+Q(x(t), y(t), z(t))\,y'(t)+$$
$$+R(x(t), y(t), z(t))\,z'(t)]\,\mathrm{d}t. \tag{20}$$

В случае плоской гладкой кривой $x=x(t)$, $y=y(t)$ формула (19) имеет вид

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{a}^{b} P(x(t), y(t))\,x'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{21}$$

Для плоской гладкой кривой $y=y(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$, заданной явным уравнением, получим

$$\left.\begin{aligned}\int\limits_{AB} P(x, y)\,\mathrm{d}x&=\int\limits_{a}^{b} P(x, y(x))\,\mathrm{d}x,\\ \int\limits_{AB} Q(x, y)\,\mathrm{d}y&=\int\limits_{a}^{b} Q(x, y(x))\,y'(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

где a и b — абсциссы концов A и B дуги AB.

Примеры. 1. Вычислить $I=\int\limits_{AB}(x+y)\,\mathrm{d}x+(x+z)\,\mathrm{d}y+(y+z)\,\mathrm{d}z$ вдоль отрезка прямой AB от точки A (1, 1, 3) до точки B (3, 2, 1).

Решение. Составим параметрические уравнения прямой, проходящей через точки A и B:

$$x=1+2t,\ y=1+t,\ z=3-2t. \tag{*}$$

Из равенств (*) следует, что точке A соответствует значение $t=0$, а точке B — значение $t=1$. Далее, имеем $x'(t)=2$, $y'(t)=1$, $z'(t)=-2$. Используя формулу (19), находим

$$I=\int_0^1 [(1+2t+1+t)\cdot 2+(1+2t+3-2t)\cdot 1+$$

$$+(1+t+3-2t)(-2)]\,dt=\int_0^1 8t\,dt=4.$$

2. Вычислить $I=\int\limits_{\breve{A}B} xy^2\,dx+x^2y\,dy$ вдоль дуги параболы $y=x^2$ от точки A (1, 1) до точки B (2, 4).

Решение. Принимая x за параметр, по формуле (22) получим

$$I=\int_1^2 (x\cdot x^4+x^2\cdot x^2\cdot 2x)\,dx=\left.\frac{x^6}{2}\right|_1^2=31.$$

6°. Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода. Пусть AB — направленная пространственная кривая с началом A и концом B. Тогда все касальные к AB также являются направленными прямыми. Обозначим углы, которые образует касательная к AB с осями координат, через α, β, γ. Очевидно, что эти углы являются функциями координат x, y, z точки касания M. Выделим из AB элементарную дугу dl и будем считать ее прямолинейной. Значит, dl есть вектор с проекциями dx, dy, dz, направленный так же, как и кривая AB. Следовательно, $dx=\cos\alpha\,dl$, $dy=\cos\beta\,dl$, $dz=\cos\gamma\,dl$. Тогда общий интеграл второго рода выразится через интеграл первого рода по формуле

$$\int\limits_{\breve{A}B} P\,dx+R\,dy+R\,dz=\int\limits_{\breve{A}B}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dl. \tag{23}$$

7°. Формула Грина. Пусть функции P и Q непрерывно дифференцируемы на компактной фигуре Φ, ограниченной замкнутой гладкой линией Λ. Тогда имеет место формула

$$\int\limits_{\Lambda} P\,dx+Q\,dy=\iint\limits_{\Phi}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)ds, \tag{24}$$

которая называется *формулой Грина*. Она играет фундаментальную роль в векторном анализе.

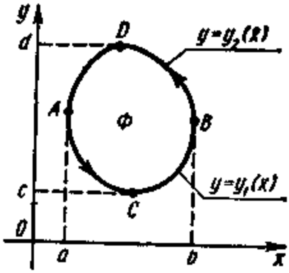


Рис. 122

Докажем справедливость формулы (24). Рассмотрим на плоскости xOy выпуклую в направлении обеих осей фигуру Ф, ограниченную замкнутым контуром Λ (рис. 122), состоящим из двух кривых $y=y_1(x)$ и $y=y_2(x)$, где $y_1(x)\leqslant y_2(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$. Так как по условию функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывно дифференцируемы на Ф, то существует двойной интеграл $\iint\limits_{\Phi}\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\,\mathrm{d}s$, который можно преобразовать следующим образом:

$$\iint\limits_{\Phi}\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\,\mathrm{d}s=\int\limits_a^b\left[\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int\limits_a^b P(x, y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)}\,\mathrm{d}x=$$

$$=\int\limits_a^b[P(x, y_2(x))-P(x, y_1(x))]\,\mathrm{d}x=$$

$$=\int\limits_a^b P(x, y_2(x))\,\mathrm{d}x-\int\limits_a^b P(x, y_1(x))\,\mathrm{d}x. \qquad (25)$$

Если взять в качестве параметра x и записать параметрические уравнения кривой ADB в виде $x=x$ и $y=y_2(x)$, а кривой ACB — в виде $x=x$ и $y=y_1(x)$, то, используя соотношения (22), определенные интегралы в равенстве (25) можно заменить равными им криволинейными интегралами:

$$\int\limits_a^b P(x, y_2(x))\,\mathrm{d}x=\int\limits_{ADB}P(x, y)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int\limits_a^b P(x, y_1(x))\,\mathrm{d}x=\int\limits_{ACB}P(x, y)\,\mathrm{d}x. \qquad (26)$$

Подставляя выражения (26) в (25) и учитывая свойства криволинейных интегралов, имеем

$$\iint\limits_{\Phi}\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\,\mathrm{d}s=\int\limits_{ADB}P(x, y)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{ACB}P(x, y)\,\mathrm{d}x=$$

$$=-\int\limits_{BDA}P(x, y)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{ACB}P(x, y)\,\mathrm{d}x=-\int\limits_{\Lambda}P(x, y)\,\mathrm{d}x. \qquad (27)$$

Аналогично

$$\iint\limits_{\Phi} \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \mathrm{d}s = \int\limits_{\Lambda} Q(x, y)\,\mathrm{d}y. \tag{28}$$

Вычитая (27) из (28), придем к формуле (24).

Формула (24) получена для выпуклой фигуры Ф. Однако она справедлива и для любой невыпуклой фигуры.

Используя формулу Грина (24), выведем формулы для вычисления площади фигуры Ф с помощью криволинейного интеграла. Если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ соответственно равны $-y$ и 0, т. е. $P(x, y)=-y$, а $Q(x, y)=0$, то $\frac{\partial P}{\partial y}=-1$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=0$ и формула (24) примет вид $\iint\limits_{\Phi}(0+1)\,\mathrm{d}s=\int\limits_{\Lambda} -y\,\mathrm{d}x+0\cdot\mathrm{d}y$, откуда

$$S=-\int\limits_{\Lambda} y\,\mathrm{d}x. \tag{29}$$

Аналогично, полагая $P(x, y)=0$, $Q(x, y)=x$, получим

$$S=\int\limits_{\Lambda} x\,\mathrm{d}y. \tag{30}$$

При $P(x, y)=-\frac{1}{2}y$, $Q(x, y)=\frac{1}{2}x$ находим

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{\Lambda} x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x. \tag{31}$$

Любая из формул (29)—(31) позволяет вычислять площадь фигуры с помощью криволинейного интеграла.

Пример. Найти площадь S плоской фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Решение. Параметрические уравнения эллипса имеют вид $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, где параметр t изменяется в пределах от 0 до 2π. По формуле (30), используя выражение криволинейного интеграла через определенный интеграл, находим

$$S=\int\limits_{\Lambda} x\,\mathrm{d}y=\int\limits_{0}^{2\pi} a\cos t\cdot b\cos t\,\mathrm{d}t=ab\int\limits_{0}^{2\pi}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\pi ab.$$

8⁰. Упражнения

Вычислите криволинейные интегралы первого рода:

1. $\int\limits_{AB}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}l$ по одному витку винтовой линии $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=t$, где $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

2. $\int\limits_{AB} \left(4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}\right) dl$ по отрезку прямой от точки $A(-1, 0)$ до точки $B(0, 1)$.

3. $\int\limits_{AB} y\, dl$ по дуге параболы $y^2=2x$ от точки $A(0, 0)$ до точки $B(1, 1)$.

4. $\int\limits_{AB} y^2\, dl$ по четверти окружности $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, где $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$.

5. $\int\limits_{AB} xy\, dl$ по четверти эллипса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, где $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$.

Вычислите криволинейные интегралы второго рода:

6. $\int\limits_{AB} P\, dx$, где AB — дуга параболы $y^2=x$ от точки $A(1, -1)$ до точки $B(1, 1)$; $P=y$.

7. $\int\limits_{ABCA} P\, dx$, где $ABCA$ — замкнутая ломаная линия с вершинами $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$; $P=x+y+z$.

8. $\int\limits_{AB} P\, dx + Q\, dy$, где AB — дуга параболы $y=x^2$ от точки $A(-1, 1)$ до точки $B(-2, 4)$; $P=xy$, $Q=y-x$.

9. $\int\limits_{AB} P\, dx + Q\, dy$, где AB — дуга кубической параболы $y=x^3$ от точки $A(1, 1)$ до точки $B(2, 8)$; $P=x^2+y^2$, $Q=2xy$.

10. $\int\limits_{AB} P\, dx + Q\, dy + R\, dz$, где AB — отрезок прямой от точки $A(1, 2, -1)$ до точки $B(3, 3, 2)$; $P=x^2$, $Q=-yz$, $R=z$.

§ 7.2. Площадь поверхности. Определение поверхностных интегралов первого и второго рода, их свойства и вычисление. Связь между поверхностными интегралами первого и второго рода

1°. Односторонние и двусторонние поверхности. Возьмем на поверхности П произвольную точку M и проведем через нее вектор $\vec{n}(M)$, нормальный к поверхности П. Вектор нормали $\vec{n}(M)$ является вектор-функцией точки M поверхности. Поверхности П, на которых вектор-функция $\vec{n}(M)$ непрерывна на П, т. е. вектор нормали $\vec{n}(M)$ непрерывно изменяется при переходе от точки к точке, называются *двусторонними* (или *ориентируемыми*) поверхностями (рис. 123). Плоскость, сфера, эллипсоид — двусторонние поверхности. Вообще, любая поверхность, которая является графиком непрерывно дифференцируемой функции, определенной на фигуре Ф, является двусторонней поверхностью.

Однако существуют поверхности, на которых вектор-функция $\vec{n}(M)$ не является непрерывной. Такие поверхности называются *односторонними*. Примером односторонней поверхности может служить так называемый *лист Мебиуса* (рис. 124). Эта поверхность может быть образована из прямоугольника $ABCD$ с помощью склеивания сторон AB и CD так, что при этом совпадут точки C и B, A

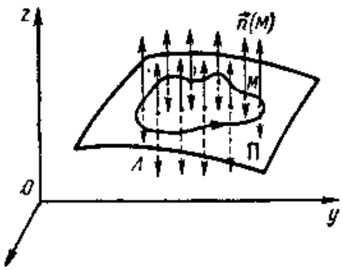


Рис. 123

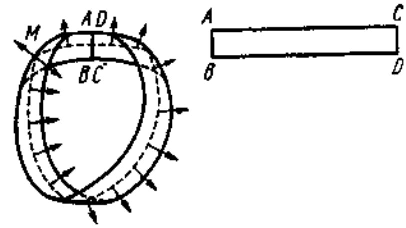


Рис. 124

и D. Легко проверить, что при обходе листа Мебиуса по его средней линии вектор нормали меняет направление на противоположное.

Для двусторонней поверхности совокупность всех точек с выбранными в них векторами нормали называется *стороной* поверхности. Выбор определенной стороны поверхности называется *ориентацией* поверхности. Если выбрана ориентация поверхности, то поверхность называется *ориентированной*.

Будем считать положительным направлением обхода линии Λ такое направление, при движении по которому ориентированная поверхность Π остается слева по отношению к точке, совершающей обход (см. рис. 123). При изменении ориентации поверхности положительное направление линии Λ меняется на противоположное.

2⁰. Площадь поверхности. Рассмотрим в пространстве $Oxyz$ поверхность Π, заданную уравнением вида $z=z(x, y)$, где $z(x, y)$ — непрерывно дифференцируемая функция. Пусть проекция Φ поверхности Π на плоскость xOy является компактной фигурой. Разобьем Φ на ячейки Φ_k и выберем в каждой ячейке Φ_k точку $N_k(x_k, y_k)$. Проведем в точке $M_k(x_k, y_k, z_k)$, где $z_k=z(x_k, y_k)$, касательную плоскость P_k к поверхности Π. Угол между нормалью к P_k, направленной вверх, и осью Oz обозначим через γ_k. Согласно известной формуле, имеем $\cos\gamma_k=\dfrac{1}{\sqrt{1+[z'_x(N_k)]^2+[z'_y(N_k)]^2}}$. Обозначим через $\Delta\rho_k$ площадь той части плоскости P_k, которая проектируется в Φ_k (рис. 125). Тогда

$$\Delta\rho_k=\frac{\Delta s_k}{\cos\gamma_k}=\sqrt{1+[z'_x(N_k)]^2+[z'_y(N_k)]^2}\,\Delta s_k,$$

где Δs_k — площадь ячейки Φ_k. Теперь положим

$$\omega_n=\sum_{k=1}^{n}\Delta\rho_k. \qquad (1)$$

Сумма (1) представляет собой площадь «чешуйчатой» поверхности, образованной всеми кусками плоскостей.

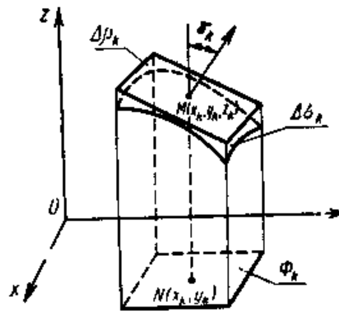


Рис. 125

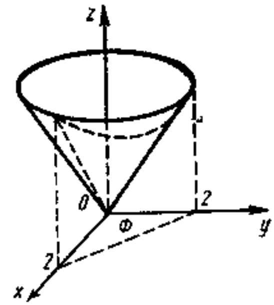


Рис. 126

Определение 1. Площадью Σ *поверхности* П называется предел площади (1) построенной «чешуйчатой» поверхности при условии, что диаметр d разбиения $\{\Phi_k\}$ стремится к нулю, т. е.

$$\Sigma=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}\Delta\rho_k. \tag{2}$$

Покажем, что предел (1) при $d\to 0$ существует и выражается через двойной интеграл по формуле

$$\Sigma=\iint_{\Phi}\sqrt{1+p^2(x, y)+q^2(x, y)}\,ds, \tag{3}$$

где $p(x, y)=z'_x(x, y)$, $q(x, y)=z'_y(x, y)$.

В самом деле, сумма (1) представляет собой интегральную сумму для функции $\sqrt{1+p^2(x, y)+q^2(x, y)}$. Так как эта функция по условию непрерывна на фигуре Ф, то по теореме 2 § 2.1 предел суммы при $d\to 0$ существует и равен двойному интегралу (3).

Пример. Найти площадь части конической поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, расположенной в I октанте и ограниченной плоскостями $x=0$, $y=0$, $x+y=2$ (рис. 126).

Решение. Для вычисления искомой площади Σ воспользуемся формулой (3):

$$\Sigma=\iint_{\Phi}\sqrt{1+p^2(x, y)+q^2(x, y)}\,ds=$$

$$=\iint_{\Phi}\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,ds=\sqrt{2}\iint_{\Phi}ds=\sqrt{2}S,$$

где S — площадь проекции поверхности на плоскость xOy. Очевидно, что $S=\int_0^2(2-x-0)\,dx=2$, откуда $\Sigma=2\sqrt{2}$.

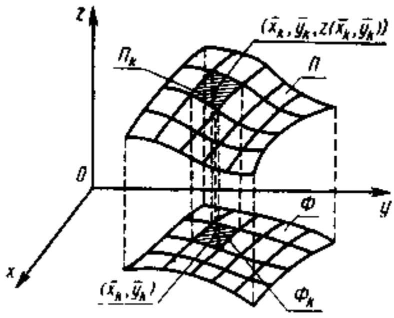


Рис. 127

3°. Определение поверхностного интеграла первого рода и его свойства. Пусть на гладкой* поверхности П задана функция $f(M)$ точки $M(x, y, z)$ поверхности П. Рассмотрим разбиение $\{\Pi_k\}$ поверхности П на части с площадями $\Delta\sigma_1, \ldots, \Delta\sigma_n$ и диаметрами $d_1, \ldots, d_n$. Наибольшее из чисел d_k обозначим через d и назовем *диаметром* произведенного разбиения. В каждой частичной поверхности Π_k отметим произвольную точку $\bar{N}_k(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$ и составим сумму парных произведений

$$\omega_n = \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)\Delta\sigma_k. \tag{4}$$

Точки $\bar{N}_k (k=1, \ldots, n)$ назовем *отмеченными* точками.

Суммы вида (4) называются (поверхностными) *интегральными суммами первого рода* для функции $f(x, y, z)$, соответствующими разбиению $\{\Pi_k\}$ поверхности П (рис. 127) с отмеченными точками $(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$. Число I называется *пределом интегральных сумм* (4) при $d \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых разбиений поверхности П кусочно-гладкими кривыми на конечное число частей Π_i, диаметр d которых меньше δ, выполняется неравенство $|\omega_n - I| < \varepsilon$ независимо от выбора отмеченных точек M_i на частях Π_i.

Определение 2. Предел интегральных сумм (4) при $d \to 0$ (если он существует) называется *поверхностным интегралом первого рода* от функции $f(x, y, z)$ по поверхности П и обозначается $\iint\limits_{\Pi} f(M)\,d\sigma$ или $\iint\limits_{\Pi} f(x, y, z)\,d\sigma$. В этом случае функция $f(x, y, z)$ называется *интегрируемой* (по Риману) по поверхности П.

Комментарии к определению 2. 1) Определение поверхностного интеграла первого рода аналогично определениям двойного интеграла и криволинейного интеграла первого рода. Поэтому поверхностный интеграл первого рода обладает основными свойствами указанных интегралов: аддитивностью, линейностью, монотонностью и др. Рекомендуем самостоятельно сформулировать и доказать эти свойства.

---

* Поверхность П называется *гладкой*, если в каждой ее точке существует касательная плоскость, положение которой непрерывно меняется при переходе от точки к точке.

2) Поверхностный интеграл первого рода не зависит от выбора стороны поверхности.

4⁰. Вычисление поверхностного интеграла первого рода. Пусть некоторая гладкая поверхность П задана уравнением вида $z=z(x, y)$, где $z(x, y)$ — непрерывно дифференцируемая функция на компактной фигуре Ф, являющейся проекцией П на плоскость xOy. Пусть, далее, функция $f(x, y, z)$ непрерывна на П, а значит, интегрируема на П. Обозначим через $\{П_k\}$ разбиение поверхности П, а через $\{Ф_k\}$ — проекцию $\{П_k\}$ на плоскость xOy (рис. 127). Согласно формуле (3), площадь $\Delta\sigma_k$ каждой ячейки есть

$$\Delta\sigma_k=\iint\limits_{\Phi_k}\sqrt{1+p^2(x, y)+q^2(x, y)}\,dx\,dy. \qquad (5)$$

По теореме о среднем получаем

$$\Delta\sigma_k=\sqrt{1+p^2(\bar{x}_k, \bar{y}_k)+q^2(\bar{x}_k, \bar{y}_k)}\,\Delta s_k, \qquad (6)$$

где $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$ — некоторая точка фигуры $Ф_k$, а Δs_k — площадь $Ф_k$. Рассмотрим на $П_k$ точку $(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$, где $\bar{z}_k=z_k(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$, и составим интегральную сумму для функции $f(x, y, z)$ по разбиению $\{П_k\}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)\,\Delta\sigma_k=$$

$$=\sum_{k=1}^{n} f[\bar{x}_k, \bar{y}_k, z(\bar{x}_k, \bar{y}_k)]\sqrt{1+p^2(\bar{x}_k, \bar{y}_k)+q^2(\bar{x}_k, \bar{y}_k)}\cdot\Delta s_k. \qquad (7)$$

Переходя в равенстве (7) к пределу при $d\to 0$, получим

$$\iint\limits_{П} f(x, y, z)\,d\sigma=$$

$$=\iint\limits_{\Phi} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1+p^2(x, y)+q^2(x, y)}\,dx\,dy, \qquad (8)$$

где $p(x, y)=z'_x(x, y)$, $q(x, y)=z'_y(x, y)$. Формула (8) дает выражение поверхностного интеграла первого рода через двойной по проекции Ф поверхности П на плоскость xOy.

Аналогично выводятся формулы, связывающие интегралы по поверхности П и двойные интегралы по ее проекциям на плоскости yOz и xOz.

Пример. Вычислить $I=\iint\limits_{П}(6x+4y+3z)\,d\sigma$ по части плоскости $x+2y+3z=6$, расположенной в I октанте (рис. 128).

Решение. Поверхность П задана уравнением $z=\frac{1}{3}(6-x-2y)$, где функция $z(x, y)=\frac{1}{3}(6-x-2y)$ и ее частные производные $z'_x(x, y)=-\frac{1}{3}$, $z'_y(x, y)=-\frac{2}{3}$ непрерывны в компактной области Ф — проекции П на плоскость xOy. Поэтому заданный интеграл существует; для его вычисления воспользуемся формулой (8):

$$I=\iint_{\Phi}\left[6x+4y+3\frac{1}{3}(6-x-2y)\right]\sqrt{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2}\,ds=$$

$$=\frac{\sqrt{14}}{3}\iint_{\Phi}(5x+2y+6)\,ds=\frac{\sqrt{14}}{3}\int_0^3\left[\int_0^{6-2y}(5x+2y+6)\,dx\right]dy=$$

$$=54\sqrt{14}.$$

5⁰. Определение поверхностного интеграла второго рода и его свойства. Пусть П — гладкая ограниченная ориентированная поверхность, на которой задана функция $f(M)$ точки M этой поверхности, а $\vec{n}(M)$ — непрерывная вектор-функция, где $\vec{n}(M)$ — единичная нормаль к П. Обозначим разбиение поверхности П через $\{\Pi_k\}$, а площадь ячейки Π_k — через $\Delta\sigma_k$. На каждой ячейке Π_k выберем произвольно точку $\overline{N}_k$ и обозначим через α_k, β_k, γ_k углы, образуемые с координатными осями нормальным вектором $\vec{n}(\overline{N}_k)$. Составим суммы вида

$$\omega_n^{(1)}=\sum_{k=1}^{n} f(\overline{N}_k)\cos\gamma_k\Delta\sigma_k,\quad \omega_n^{(2)}=\sum_{k=1}^{n} f(\overline{N}_k)\cos\beta_k\Delta\sigma_k,$$
$$\omega_n^{(3)}=\sum_{k=1}^{n} f(\overline{N}_k)\cos\alpha_k\Delta\sigma_k, \tag{9}$$

которые назовем (поверхностными) *интегральными суммами второго рода*, соответствующими разбиению $\{\Pi_k\}$ с отмеченными точками $\overline{N}_k$ $(k=1, \ldots, n)$. Определение предела интегральных сумм (9) аналогично определению предела для сумм вида (4).

Определение 3. Пределы интегральных сумм (9) при $d\to 0$ (если они существуют) называются *поверхностными интегралами второго рода* от функции $f(M)$ по поверхности П и обозначаются соответственно

$$\iint_{\Pi} f(M)\cos\gamma\,d\sigma,\ \iint_{\Pi} f(M)\cos\beta\,d\sigma,$$

$$\iint_{\Pi} f(M)\cos\alpha\,d\sigma \text{ или } \iint_{\Pi} f(x, y, z)\cos\gamma\,d\sigma,$$

$$\iint_{\Pi} f(x, y, z)\cos\beta\,d\sigma,$$

$$\iint_{\Pi} f(x, y, z)\cos\alpha\,d\sigma.$$

Рис. 128

Комментарии к определению 3. 1) Из определения поверхностных интегралов второго рода вытекает, что они зависят от выбора стороны поверхности. В самом деле, при изменении направлений всех векторов $\vec{n}(M)$ на противоположные все три поверхностных интеграла второго рода меняют знак на противоположный, поскольку косинусы углов, образуемых вектором нормали с осями координат, также меняют знак на противоположный.

2) После выбора стороны поверхности поверхностные интегралы второго рода можно рассматривать как поверхностные интегралы первого рода по поверхности П соответственно от функций $f(M)\cos\gamma(M)$, $f(M)\cos\beta(M)$, $f(M)\cos\alpha(M)$. В самом деле, после выбора определенной стороны поверхности $\cos\gamma$, $\cos\beta$, $\cos\alpha$ представляют собой функции точки M на поверхности П.

3) Из определения следует, что поверхностные интегралы второго рода зависят от выбора декартовой системы координат в пространстве $\mathbf{R}^3$, так как при изменении системы координат (с правой на левую) изменяются косинусы углов, образуемых вектором нормали $\vec{n}(M)$ с координатными осями.

Перейдем к определению общего поверхностного интеграла второго рода. Пусть задана непрерывная вектор-функция $\vec{a}(M)$ на гладкой ограниченной ориентированной поверхности П. Выберем на П определенную сторону и рассмотрим скалярное произведение вектор-функций $\vec{n}(M)$ и $\vec{a}(M)$, где $\vec{n}(M)$ — единичный вектор нормали к поверхности П. Скалярное произведение $\vec{a}(M)\vec{n}(M)$ является непрерывной скалярной функцией, определенной на П, и поэтому не зависит от выбора координатной системы в $\mathbf{R}^3$. Значит, поверхностный интеграл первого рода $\iint\limits_{\Pi}\vec{a}(M)\vec{n}(M)\,d\sigma$ также не зависит от выбора системы координат. Пусть $\vec{a}(M)=(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$, $\vec{n}(M)=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Тогда поверхностный интеграл примет вид

$$\iint\limits_{\Pi}\vec{a}(M)\vec{n}(M)\,d\sigma=\iint\limits_{\Pi}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,d\sigma. \qquad (10)$$

Определение 4. Интеграл в правой части равенства (10), представляющий собой сумму трех поверхностных интегралов второго рода, называется *общим поверхностным интегралом второго рода.*

Комментарии к определению. 4. 1) Очевидно, что общий поверхностный интеграл второго рода от функции $f(M)$ по поверхности П есть предел интегральных сумм вида $\omega_n=\omega_n^{(1)}+\omega_n^{(2)}+\omega_n^{(3)}$ при $d\to 0$ (если он существует).

2) Интеграл (10) есть поток вектора $\vec{a}(M)$ через поверхность П (подробнее см. п. 1⁰ § 8.2).

3) Поверхностный интеграл второго рода обладает всеми свойствами поверхностного интеграла первого рода, кроме следующего: при изменении стороны поверхности поверхностный интеграл второго рода изменяет знак на противоположный.

6⁰. Вычисление поверхностных интегралов второго рода. Пусть двусторонняя поверхность П задана уравнением вида $z=z(x, y)$ и Φ_1 — проекция поверхности П на плоскость xOy. Выберем на П ту сторону, для которой единичный вектор нормали $\vec{n}(M)$ образует с Oz острый угол. Рассмотрим на П непрерывную функцию $R(x, y, z)$ и укажем способ вычисления интеграла $\iint\limits_{\Pi} R(x, y, z)\cos\gamma\, d\sigma$.

Пусть $\{\Pi_k\}$ — разбиение П, а $\{\Phi_k\}$ — проекция $\{\Pi_k\}$ на плоскость xOy. Возьмем произвольно на каждой части Π_k точку $M_k(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$ и составим интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^{n} R(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)\,\Delta\sigma_k \cos\gamma_k = \sum_{k=1}^{n} R(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)\,\Delta s_k, \tag{11}$$

где Δs_k — площадь Φ_k. Так как $\bar{z}_k = z(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$, то

$$\sum_{k=1}^{n} R(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k) = \sum_{k=1}^{n} R(\bar{x}_k, \bar{y}_k, z(\bar{x}_k, \bar{y}_k))\,\Delta s_k. \tag{12}$$

Правая часть равенства (12) является интегральной суммой для функции $R(x, y, z(x, y))$ и области Φ_1. Переходя в равенстве (12) к пределу при $d\to 0$, получим

$$\iint\limits_{\Pi} R(x, y, z)\cos\gamma\, d\sigma = \iint\limits_{\Phi_1} R(x, y, z(x, y))\, dx\, dy. \tag{13}$$

Из формулы (13) следует, что поверхностный интеграл второго рода существует. Отметим, что если изменить ориентацию поверхности П, то в правой части надо поставить знак минус.

Аналогично получаются следующие формулы:

$$\iint\limits_{\Pi} P(x, y, z)\cos\beta\, d\sigma = \iint\limits_{\Phi_2} P(x(y, z), y, z)\, dx\, dz, \tag{14}$$

$$\iint\limits_{\Pi} Q(x, y, z)\cos\alpha\, d\sigma = \iint\limits_{\Phi_3} Q(x, y(x, z), z)\, dy\, dz, \tag{15}$$

где Φ_2 и Φ_3 — проекции П соответственно на yOz и xOz.

Отметим, что для обозначения поверхностного интеграла $\iint\limits_{\Pi} R(x, y, z)\cos\gamma\, d\sigma$ используется символ $\iint\limits_{\Pi} R(x, y, z)\, dx\, dy$.

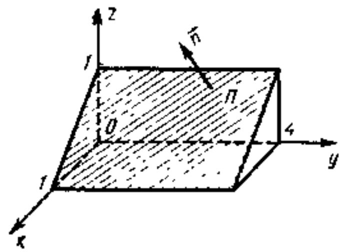


Рис. 129

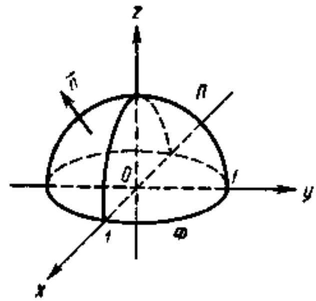


Рис. 130

Последнее обозначение употребляется и в том случае, когда П не является графиком функции $z=z(x, y)$.

Формулы (13)—(15) служат для вычисления поверхностных интегралов второго рода. Для вычисления общего поверхностного интеграла второго рода (10) служат те же формулы, если П однозначно проектируется на все три координатные плоскости. В более сложном случае П разбивают на части, обладающие указанными свойствами, и интеграл (10) представляют как сумму интегралов по этим частям.

Примеры. 1. Вычислить $I=\iint\limits_{П} x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy$, где П — верхняя сторона (векторы нормалей составляют острые углы с осью Oz) части плоскости $x+z-1=0$, отсеченной плоскостями $y=0$, $y=4$ и лежащей в I октанте (рис. 129).

Решение. Согласно определению, имеем

$$I=\iint\limits_{\Phi_1} x(y, z)\,dy\,dz+\iint\limits_{П} y\,dz\,dx+\iint\limits_{\Phi_2} z(x, y)\,dx\,dy,$$

где Φ_1 и Φ_2 — проекции П на плоскости yOz и xOy. Так как П параллельна оси Oy, то $\iint\limits_{П} y\,dz\,dx=0$. Далее, используя формулы (13) и (15), соответственно получим

$$\iint\limits_{П} z\,dx\,dy=\iint\limits_{\Phi_2}(1-x)\,dx\,dy=\int\limits_0^4 dy\int\limits_0^1(1-x)\,dx=2,$$

$$\iint\limits_{П} x\,dy\,dz=\iint\limits_{\Phi_1}(1-z)\,dy\,dz=\int\limits_0^4 dy\int\limits_0^1(1-z)\,dz=2.$$

Итак, $I=2+0+2=4$.

2. Вычислить $I=\iint\limits_{\Pi} z\cos\gamma\, d\sigma$, где П — внешняя сторона полусферы $x^2+y^2+z^2=1$, расположенной над плоскостью xOy, а γ — острый угол вектора нормали к П с осью Oz (рис. 130).

Решение. Имеем $I=\iint\limits_{\Pi} z\cos\gamma\, d\sigma=\iint\limits_{\Pi} z\, dx\, dy$. Проекцией П на плоскость xOy является круг $\Phi: x^2+y^2\leqslant 1$. По формуле (16) находим $I=\iint\limits_{\Phi}\sqrt{1-x^2-y^2}\, dx\, dy$. Перейдем к полярным координатам. Тогда, используя формулу (5) § 6.3, получим

$$I=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1-r^2}\, r\, dr=\int\limits_0^{2\pi}\left[-\frac{(1-r^2)^{3/2}}{3}\right]\Bigg|_0^1 d\varphi=\frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi=\frac{2}{3}\pi.$$

7⁰. Упражнения

Вычислите поверхностные интегралы первого рода $\iint\limits_{\Pi} f(x, y, z)\, d\sigma$:

1. П — часть плоскости $x+y+z=a$, лежащая в I октанте; $f(x, y, z)=1$.

2. П — полусфера $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$; $f(x, y, z)=x$.

3. П — поверхность параболоида вращения $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, ограниченная плоскостями $z=0$ и $z=2$; $f(x, y, z)=x^2+y^2$.

4. П — коническая поверхность $z^2=x^2+y^2$, ограниченная плоскостями $z=0$ и $z=1$; $f(x, y, z)=x^2+y^2$.

5. П — поверхность параболоида вращения $z=1-x^2-y^2$, ограниченная плоскостями $z=0$ и $z=1$; $f(x, y, z)=\sqrt{1+4x^2+4y^2}$.

Вычислите поверхностные интегралы второго рода:

6. $\iint\limits_{\Pi} -x\, dy\, dz+z\, dz\, dx+5\, dx\, dy$ по верхней стороне части плоскости $2x+3y+z=6$, лежащей в I октанте.

7. $\iint\limits_{\Pi} \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy$ по нижней стороне круга $x^2+y^2\leqslant R^2$.

8. $\iint\limits_{\Pi} x^2\, dy\, dz+z^2\, dx\, dy$ по нижней стороне части конуса $x^2+y^2=z^2$, $0\leqslant z\leqslant 1$.

9. $\iint\limits_{\Pi} (y^2+z^2)\, dx\, dy$ по верхней стороне цилиндрической поверхности $z^2=1-x^2$, $0\leqslant y\leqslant 1$.

10. $\iint\limits_{\Pi} (z-R)^2\, dx\, dy$ по верхней стороне полусферы $x^2+y^2+(z-R)^2=R^2$, $R\leqslant z\leqslant 2R$.

Глава VIII

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

§ 8.1. Скалярные и векторные поля. Линии и поверхности уровня скалярного поля. Производная по направлению. Градиент скалярного поля, его координатное и инвариантное определения. Векторные линии и их дифференциальные уравнения

1°. Скалярные и векторные поля. Линии и поверхности уровня скалярного поля. *Определение 1. Скалярным полем* точки M называется скалярная функция $u(M)$ точки M вместе с областью ее определения.

Введем в пространстве систему координат $Oxyz$; тогда каждой точке M в этой системе соответствуют координаты (x, y, z), а скалярное поле u является функцией этих координат: $u=u(M)=u(x, y, z)$.

Примерами скалярных полей являются поле температуры атмосферы, поле плотности массы и т. д.

Определение 2. Векторным полем точки M называется векторная функция $\vec{a}(M)$ точки M вместе с областью ее определения.

Примерами векторных полей являются поле магнитной напряженности, поле скоростей установившегося потока жидкости и т. д.

Задание векторного пространственного поля $\vec{a}(M)$ равносильно заданию трех скалярных функций $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$, являющихся проекциями вектора $\vec{a}(M)$ на координатные оси: $\vec{a}(M)=P(x, y, z)\vec{i}+Q(x, y, z)\vec{j}+R(x, y, z)\vec{k}$. В дальнейшем будем предполагать, что скалярные и векторные поля являются однозначными, непрерывными и дифференцируемыми достаточное число раз. Если частные производные одновременно не равны нулю, то уравнение $u(x, y, z)=C$ $(C=\text{const})$ определяет поверхность, вдоль которой функция u сохраняет постоянное значение; такая поверхность называется *поверхностью уровня* функции u. Очевидно, что рассматриваемая область T заполнена поверхностями уровня и через каждую ее точку проходит одна и только одна такая поверхность. Очевидно также, что поверхности уровня не пересекаются между собой.

Аналогично определяются *линии уровня* $u(x, y)=C$ непрерывно дифференцируемой функции $u=u(x, y)$, заданной в области $\Phi\subset\mathbf{R}^2$.

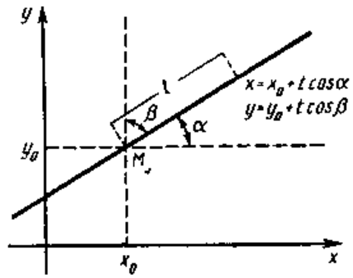


Рис. 131

2⁰. Производная по направлению. Координатное и инвариантное определения градиента. *Определение 3. Градиентом* дифференцируемого скалярного плоского поля $u=u(M)$ называется векторное поле точки M, обозначаемое $\operatorname{grad} u(M)$ и определяемое формулой

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}, \tag{1}$$

где частные производные вычислены в точке M.

Аналогично, для дифференцируемого скалярного пространственного поля $u(x, y, z)$ градиент определяется формулой

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}. \tag{2}$$

Многие важные векторные поля, изучаемые в физике, например поле сил тяготения или поле заряда, являются градиентами некоторых скалярных полей.

Модуль (длина) $\operatorname{grad} u$ плоского поля $u(M)$ и его направляющие косинусы определяются по известным из аналитической геометрии формулам

$$|\operatorname{grad} u| =\sqrt{(u'_x)^2+(u'_y)^2},\ \cos\alpha_0=\frac{u'_x}{|\operatorname{grad} u|},\ \cos\beta_0=\frac{u'_y}{|\operatorname{grad} u|}. \tag{3}$$

Рассмотрим единичный вектор $\vec{l}=(\cos\alpha, \cos\beta)$ произвольного направления, где α и β — углы, образуемые вектором $\vec{l}$ с осями координат, т. е. $\vec{l}=\cos\alpha\cdot\vec{i}+\cos\beta\cdot\vec{j}$. Параметрические уравнения прямой, проходящей через точку M_0 в направлении вектора $\vec{l}$, имеют вид $x=x_0+t\cos\alpha$, $y=y_0+t\cos\beta$ (рис. 131). Тогда для точек этой прямой функция $u(x, y)$ является функцией $\varphi(t)$ одной переменной t:

$$\varphi(t)=u(x_0+t\cos\alpha,\ y_0+t\cos\beta),\quad -\infty<t<+\infty. \tag{4}$$

Определение 4. Производной скалярного плоского поля $u = u(M)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ *по направлению* $\vec{l}$ называется производная функции $\varphi(t)$ по t при $t=0$ (если она существует) и обозначается $\frac{\partial u}{\partial l}$.

Аналогично можно определить производную скалярного пространственного поля $u(x, y, z)$ по направлению $\vec{l}$.

Таким образом,

$$\left.\frac{\partial u(M)}{\partial l}\right|_{M=M_0} = \left.\frac{d\varphi(t)}{dt}\right|_{t=0},$$

где $\varphi(t)$ — функция, определенная равенством (4).

Комментарии к определению 4. 1) Производная по направлению $\frac{\partial u}{\partial l}$ есть скорость изменения скалярного поля по отношению к величине перемещения точки M вдоль выбранного направления.

2) Если $\vec{l}_1 = (0, 1)$ и $\vec{l}_2 = (1, 0)$, то производные по направлениям $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_2$ скалярного поля $u(M)$ являются соответственно частными производными по x_1 и x_2 в точке M_0, т. е. $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial u}{\partial x_2}$.

Дифференцируя правую часть равенства (4) по t, согласно правилу дифференцирования сложной функции получим

$$\frac{\partial u}{\partial l} = u'_x(x_0, y_0)\cos\alpha + u'_y(x_0, y_0)\cos\beta. \tag{5}$$

Аналогично выводится формула для производной скалярного пространственного поля $u(x, y, z)$ по направлению $\vec{l}$:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = u'_x(x_0, y_0, z_0)\cos\alpha + u'_y(x_0, y_0, z_0)\cos\beta + u'_z(x_0, y_0, z_0)\cos\gamma, \tag{6}$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы вектора $\vec{l}$.

Примеры. 1. Найти градиент скалярного поля $u = xy^{-1} + z^2$ в точке M_0 (2, 1, —1). Вычислить его величину и направление.

Решение. Имеем $u'_x(x, y, z) = y^{-1}$, $u'_y(x, y, z) = -xy^{-2}$, $u'_z(x, y, z) = 2z$, $u'_x(2, 1, -1) = 1$, $u'_y(2, 1, -1) = -2$, $u'_z(2, 1, -1) = -2$. Следовательно, $\operatorname{grad} u(M_0) = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$, $|\operatorname{grad} u(M_0)| = 3$ и $\cos = 1/3$, $\cos\beta = -2/3$, $\cos\gamma = -2/3$.

2. Вычислить производную функции $u = x^2 + y^2 x$ в точке $M_0(1, 2)$ по направлению вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$, где $M_1 = (3, 0)$.

Решение. Определим единичный вектор $\vec{l}$ заданного направления $\overrightarrow{M_0M_1}$. Имеем: $\overrightarrow{M_0M_1}=(3-1,\ 0-2)=(2,\ -2)$, $|\overrightarrow{M_0M_1}|=2\sqrt{2}$, $\vec{l}=\dfrac{\overrightarrow{M_0M_1}}{|\overrightarrow{M_0M_1}|}=\dfrac{2\vec{i}-2\vec{j}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$. Отсюда $\cos\alpha=\sqrt{2}/2$, $\cos\beta=-\sqrt{2}/2$. Найдем частные производные функции u в точке M_0: $u'_x(x,\ y)=2x+y^2$, $u'_y(x,\ y)=2xy$, $u'_x(1,\ 2)=6$, $u'_y(1,\ 2)=1$. По формуле (5) получим

$$\frac{\partial u}{\partial l}=6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}.$$

Используя понятие градиента и формулу для скалярного произведения, представим равенство (5) в виде скалярного произведения векторов $\operatorname{grad} u$ и $\vec{l}$:

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\operatorname{grad} u\cdot\vec{l}=|\operatorname{grad} u|\cdot|\vec{l}|\cdot\cos\varphi,$$

где φ — угол между вектором $\vec{l}$ и градиентом. Так как $|\vec{l}|=1$, то получаем

$$\frac{\partial u}{\partial l}=|\operatorname{grad} u|\cos\varphi. \tag{7}$$

Из равенства (7) следует, что в каждой точке, не являющейся особой ($u'_x\neq0$, $u'_y\neq0$), градиент направлен в сторону максимального возрастания функции, а модуль градиента равен величине скорости этого возрастания. Действительно, производная по направлению (7) принимает наибольшее значение, если $\cos\varphi=1$ ($\varphi=0$), и вектор $\vec{l}$ имеет то же направление, что и $\operatorname{grad} u$; в этом случае

$$\frac{\partial u}{\partial l}=|\operatorname{grad} u|=\sqrt{(u'_x)^2+(u'_y)^2}. \tag{8}$$

Это позволяет теперь вместо приведенного выше определения градиента, в котором используется система координат, дать другое, инвариантное определение.

Определение 5. Градиентом скалярного поля $u(x,\ y)$ называется вектор, характеризующий наибольшую (по модулю и направлению) скорость изменения этого скалярного поля.

Это определение градиента инвариантно, т. е. не зависит от выбора координатной системы.

Если $\cos\varphi=-1$ ($\varphi=\pi$), то производная по направлению является наименьшей, равной $-|\operatorname{grad} u|$. Если же $\cos\varphi=0$ ($\varphi=\pm\pi/2$), то производная по направлению равна нулю (рис. 132).

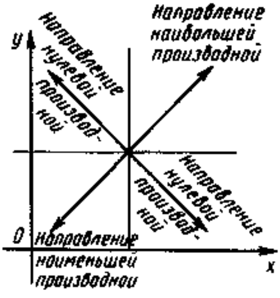


Рис. 132

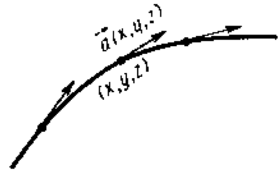


Рис. 133

Направление градиента совпадает с направлением нормали к поверхности уровня $u(x, y, z)=C$, проходящей через данную точку. В самом деле, пусть $z=z(x, y)$ — поверхность уровня функции $u(x, y, z)$, т. е. $u(x, y, z(x, y))=C$. Дифференцируя обе части этого равенства по x и y, получим

$$u'_x+u'_z p=0,\quad u'_y+u'_z q=0,\ \text{где}\ p=z'_x,\ q=z'_y. \qquad (7)$$

Из равенств (7) находим $p=z'_x=-u'_x/u'_z$, $q=z'_y=-u'_y/u'_z$. Так как нормальный вектор поверхности $z(x, y)-z=0$ имеет координаты $(p, q, -1)$, или, что то же самое, $(-u'_x/u'_z, -u'_y/u'_z, -1)$, то он коллинеарен градиенту (u'_x, u'_y, u'_z).

Предыдущие рассуждения показывают, что любое скалярное поле $u(M)$ порождает векторное поле градиента $\operatorname{grad} u$. Вопрос о том, при каких условиях данное векторное поле является полем градиента для некоторой скалярной величины, будет рассмотрен в § 8.4.

3°. Векторные линии и их дифференциальные уравнения. *Определение 6. Векторной линией* поля $\vec{a}(M)$ называется такая линия Λ, в каждой точке которой касательная совпадает с направлением вектора $\vec{a}(M)$ (рис. 133).

Векторная линия обычно называется *линией тока* для поля скоростей, *силовой линией* — для силового поля и т. д.

Совокупность всех векторных линий, проходящих через точки куска поверхности П, называются *векторной трубкой*.

Как известно, направляющие косинусы касательной пропорциональны дифференциалам dx, dy, dz. Для нахождения векторных линий поля $\vec{a}(M)$ запишем условия коллинеарности векторов (dx, dy, dz) и $\vec{a}(M)$:

$$\frac{dx}{P(x, y, z)}=\frac{dy}{Q(x, y, z)}=\frac{dz}{R(x, y, z)}, \qquad (8)$$

где P, Q, R — проекции вектора $\vec{a}(M)$ на координатные оси, являющиеся заданными функциями x, y, z.

Задача о нахождении векторных линий поля $\vec{a}(P, Q, R)$ равносильна задаче о нахождении интегральных линий системы (8).

Уравнения (8) называются *дифференциальными уравнениями векторных линий* поля $\vec{a}(M)$. Если $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ — непрерывно дифференцируемые функции и в точке M вектор $\vec{a}(M)$ отличен от нуля, то по теореме существования и единственности (см. п. 1° § 3.1) через точку M проходит одна определенная векторная линия поля $\vec{a}(M)$.

Пример. Найти векторные линии поля $\vec{a}(M)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

Решение. Дифференциальные уравнения векторных линий имеют вид

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}, \text{ или } \frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}, \ \frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}.$$

Интегрируя, получим $x=C_1y$, $y=C_2z$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Векторными линиями являются лучи, исходящие из начала координат.

4°. Упражнения

1. Найдите линии или поверхности уровня скалярных полей: а) $u=x^2-y^2$; б) $u=2yx^{-2}$; в) $u=2x-y^2-z^2$; г) $u=x^2+3y^2+z^2$.

2. Найдите производную функции $u=3x^4-xy+y^3$ в точке M (1, 2) в направлении, составляющем с осью Ox угол 60°.

3. Найдите производную функция $u=5x^2-3x-y-1$ в точке M (2, 1) в направлении от этой точки к точке N (5, 5).

4 Покажите, что производная функции $u=x^3+3x^2+4xy+y^2$ в точке M (2/3, —4/3) в любом направлении равна нулю.

5. Вычислите градиент функции $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ в точке M (1, 2, 3).

6. Вычислите градиент функции $u=\lambda/f$ в точке M (x, y, z), где λ — постоянная, а $f=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

7. Найдите угол φ между градиентами поля $u=x(x^2+y^2+z^2)^{-1}$ в точках M_1 (1, 2, 2) и M_2 (—3, 1, 0).

8. Найдите векторные линии поля $\vec{a}(M)=P(x, y, z)\vec{i}+Q(x, y, z)\vec{j}+R(x, y, z)\vec{k}$, если: а) $P=x$, $Q=2y$, $R=3z$; б) $P=2x+y$, $Q=2y$, $R=3z$; в) $P=2x+y$, $Q=2y+z$, $R=2z$.

§ 8.2. Поток векторного поля через поверхность. Физический смысл потока в поле скоростей жидкости. Вычисление потока. Формула Остроградского

1°. Поток векторного поля через поверхность. *Определение 1. Потоком Π* векторного поля $\vec{a}$ через ориентированную* кусочно-гладкую поверхность П, расположенную в области Т, называется поверхностный интеграл второго рода

* Понятие ориентированной поверхности см. в п. 4° § 7.2.

$$\Pi = \iint_{\Pi} \vec{a}\vec{n}\, d\sigma = \iint_{\Pi} \vec{a}_n\, d\sigma, \qquad (1)$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к П, указывающий ее ориентацию, $d\sigma$ — элемент площади поверхности П, а $\vec{a}_n$ — проекция вектора $\vec{a}$ на направление $\vec{n}$.

Дадим физическое истолкование поверхностного интеграла (1). Пусть $\vec{v}$ — скорость жидкости, протекающей через ориентированную поверхность П. Рассмотрим разбиение $\{\Pi_k\}$ поверхности П на n частей Π_k с площадями $\Delta\sigma_k$. Тогда произведение $\vec{v}_k\vec{n}_k\Delta\sigma_k$ равно количеству жидкости, протекающей через поверхность Π_k за единицу времени в направлении вектора $\vec{n}_k$ (рис. 134). Интеграл $\iint_{\Pi} \vec{v}\vec{n}\, d\sigma$, являющийся пределом интегральной суммы $\sum_{k=1}^{n} \vec{v}_k\vec{n}_k\Delta\sigma_k$, дает полное количество жидкости, протекающей в единицу времени через П в положительном направлении. Обозначим через α, β, γ углы, составленные нормалью $\vec{n}$ с осями координат. Тогда, используя формулу (10) § 7.2, интеграл (1) можно записать в виде

$$\Pi = \iint_{\Pi} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma. \qquad (2)$$

Учитывая соотношения (13)—(15) § 7.2, интеграл (2) перепишем следующим образом:

$$\Pi = \iint_{\Pi} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy. \qquad (3)$$

Пусть $\vec{a}(M)$ — поле скоростей в стационарном течении жидкости, так что ее скорость $\vec{a}$ в точке M зависит лишь от M, но не зависит от времени. Из сказанного выше следует,что поток скорости через ориентированную поверхность П есть количество жидкости, протекающей через П за единицу времени в том направлении, в котором ориентирована эта поверхность (ф и з и ч е с к и й с м ы с л п о т о к а).

2°. Формула Остроградского. Пусть в области $T \subset \mathbf{R}^3$ определено непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{a}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$.

О п р е д е л е н и е 2. Дивергенцией (или *расходимостью*) векторного поля $\vec{a}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k}$ называется скалярное поле точки M, обозначаемое $\operatorname{div}\vec{a}(M)$ и определяемое формулой

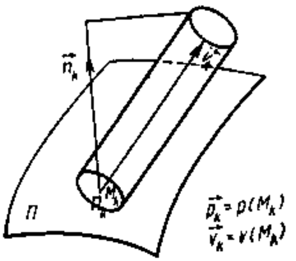


Рис. 134

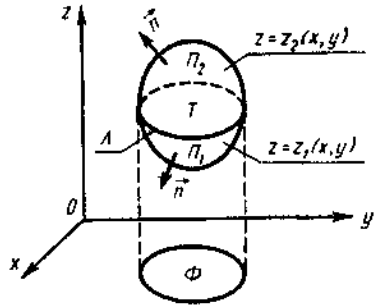


Рис. 135

$$\operatorname{div}\vec{a}(M)=P'_x(x,\ y,\ z)+Q'_y(x,\ y,\ z)+R'_z(x,\ y,\ z), \qquad (4)$$

где частные производные вычислены в точке M. Геометрический и физический смысл дивергенции будет установлен в дальнейшем (см. п. 1° § 8.4).

При некоторых условиях, которым удовлетворяет область T, имеет место *формула Остроградского*:

$$\iiint\limits_{T}\operatorname{div}\vec{a}\,dv=\iint\limits_{\Pi}\vec{a}_n\,d\sigma, \qquad (5)$$

т. е. *тройной интеграл от дивергенции вектора по телу* T *равен потоку вектора через границу* П *этого тела, ориентированную в направлении ее внешней нормали.*

Докажем справедливость формулы (5). Пусть фигура Ф — проекция поверхности П на плоскость xOy (рис. 135), а $z=z_1(x,\ y)$ и $z=z_2(x,\ y)$ — уравнения соответствующих частей поверхности П (нижней части Π_1 и верхней части Π_2), причем функции $z_1(x,\ y)$ и $z_2(x,\ y)$ непрерывны на Ф. Имеем

$$I=\iiint\limits_{T}\frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{\Phi}dx\,dy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}\,dz.$$

Вычислим внутренний интеграл по формуле Ньютона — Лейбница:

$$I=\iint\limits_{\Phi}[R(x,\ y,\ z_2(x,\ y))-R(x,\ y,\ z_1(x,\ y))]\,dx\,dy.$$

Выразив двойные интегралы через поверхностные интегралы второго рода, получим

$$I=\iint\limits_{\Pi_2}R(x,\ y,\ z)\,dx\,dy-\iint\limits_{\Pi_1}R(x,\ y,\ z)\,dx\,dy.$$

Заменяя во втором интеграле внешнюю сторону поверхности на внутреннюю, находим

$$I=\iint\limits_{\Pi_2} R(x,\ y,\ z)\,dx\,dy+\iint\limits_{\Pi_1} R(x,\ y,\ z)\,dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_{\Pi} R(x,\ y,\ z)\,dx\,dy, \tag{6}$$

где берется внешняя сторона поверхности.

Аналогично получаются формулы

$$\iiint\limits_{T} \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{\Pi} P\,dy\,dz, \tag{7}$$

$$\iiint\limits_{T} \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{\Pi} Q\,dz\,dx. \tag{8}$$

Складывая почленно равенства (6)—(8), приходим к формуле

$$\iiint\limits_{T} \operatorname{div}\vec{a}\,dv=$$

$$=\iint\limits_{\Pi} P(x,\ y,\ z)\,dy\,dz+Q(x,\ y,\ z)\,dz\,dx+R(x,\ y,\ z)\,dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_{\Pi} \vec{a}_n\,d\sigma. \tag{9}$$

К о м м е н т а р и и к ф о р м у л е О с т р о г р а д с к о г о. 1) Пусть $\vec{v}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$ — вектор скорости жидкости, протекающей через тело T. Тогда подынтегральное выражение в правой части равенства (5) есть проекция вектора $\vec{v}$ на внешнюю нормаль и интеграл по поверхности дает полное количество жидкости, вытекающей из тела T через поверхность П за единицу времени (или втекающей в тело T, если интеграл отрицателен). Это количество жидкости выражается через тройной интеграл от дивергенции $\operatorname{div}\vec{v}$. Если дивергенция тождественно равна нулю, то поверхностный интеграл равен нулю и количество жидкости, втекающей внутрь тела, равно количество жидкости, вытекающей из него (ф и з и ч е с к и й с м ы с л ф о р м у л ы О с т р о г р а д с к о г о).

2) Формула Остроградского справедлива для любого тела T, ограничённого кусочно-гладкими поверхностями, если в T поле $\vec{a}$ и его дивергенция не обращаются в бесконечность.

С помощью формулы Остроградского легко получить выражение для объема тела T через поверхностный интеграл по замкнутой поверхности П, являющейся границей этого тела. В самом деле, выберем функции P, Q, R так, чтобы $P'_x+Q'_y+R'_z\equiv 1$. Тогда получим

$$V=\iiint\limits_{T} dx\,dy\,dz=$$

$$=\iint\limits_{\Pi} P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy,$$

где V — объем тела Т. В частности, если

$$P=\frac{1}{3}x,\ Q=\frac{1}{3}y,\ R=\frac{1}{3}z,\ \text{то}$$

$$V=\frac{1}{3}\iint\limits_{\Pi} x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy. \qquad (10)$$

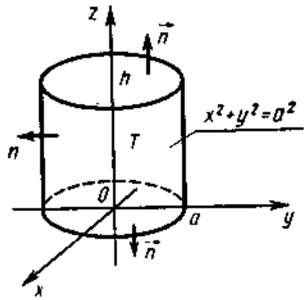


Рис. 136

Пример. Вычислить поток П векторного поля $\vec{a}(x, y, z)=4x^3\vec{i}+4y^3\vec{j}-6z^4\vec{k}$ через внешнюю сторону поверхности цилиндра $x^2+y^2=a^2$, заключенного между плоскостями $z=0$ и $z=h$ (рис. 136)

Решение. Имеем $P=4x^3$, $Q=4y^3$, $R=-6z^4$, $P'_x=12x^2$, $Q'_y=12y^2$, $R'_z=-24z^3$. Применяя формулу Остроградского (9), находим

$$\Pi=\iint\limits_{\Pi} 4x^3\,dy\,dz+4y^3\,dz\,dx-6z^4\,dx\,dy=$$

$$=\iiint\limits_{T}(12x^2+12y^2-24z^3)\,dx\,dy\,dz=$$

$$=12\iint\limits_{x^2+y^2<a^2} dx\,dy\int\limits_0^h (x^2+y^2-2z^3)\,dz=$$

$$=12\iint\limits_{x^2+y^2<a^2}\left[(x^2+y^2)\,z-\frac{z^4}{2}\right]\Bigg|_0^h dx\,dy=$$

$$=12\iint\limits_{x^2+y^2<a^2}\left[(x^2+y^2)\,h-\frac{h^4}{2}\right]dx\,dy=12\iint\limits_{r<a}\left(r^2h-\frac{h^4}{2}\right)r\,d\varphi\,dr=$$

$$=12h\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^a\left(r^3-\frac{h^3}{2}\,r\right)dr=6\pi a^2h\,(a^2-h^3).$$

3°. Упражнения

1. Вычислите поток векторного поля $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ через: а) боковую поверхность конуса $x^2+y^2\leqslant z^2$ $(0\leqslant z\leqslant h)$; б) основание этого конуса.

2. Вычислите поток векторного поля $\vec{a}=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}$ через: а) боковую поверхность цилиндра $x^2+y^2\leqslant a^2$ $(0\leqslant z\leqslant h)$; б) полную поверхность этого цилиндра.

3. Вычислите поток векторного поля $\vec{a}=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k}$ через внешнюю часть поверхности сферы $x^2+y^2+z^2=1$, лежащую в I октанте.

С помощью формулы Остроградского вычислите поверхностные интегралы:

4. $\iint\limits_{\Pi} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,d\sigma$, где Π — поверхность эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

5. $\iint\limits_{\Pi} x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$, где Π — поверхность конуса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=0$ $(0\leqslant z\leqslant b)$.

6. $\iint\limits_{\Pi} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$, где Π — поверхность цилиндра $x^2+y^2=a^2$, $-h\leqslant z\leqslant h$.

§ 8.3. Дивергенция векторного поля, ее инвариантное определение и физический смысл. Вычисление дивергенции. Соленоидальные (трубчатые) поля

1⁰. Инвариантное определение дивергенции. Определение дивергенции с помощью формулы (4) § 8.2 связано с выбором осей координат. Пользуясь формулой Остроградского, легко дать другое определение дивергенции. Пусть точка M содержится внутри какого-нибудь тела T с граничной поверхностью Π, ориентированной с помощью выбора единичного внешнего вектора $\vec{n}\,(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$. Запишем формулу (5) § 8.2:

$$\iiint\limits_{\mathrm{T}} \operatorname{div}\vec{a}\,dv = \iint\limits_{\Pi} \vec{a}_n\,d\sigma.$$

В силу теоремы о среднем значении имеем

$$\iiint\limits_{\mathrm{T}} \operatorname{div}\vec{a}\,dv = \operatorname{div}\vec{a}\,(M_1)\cdot V, \text{ или } \operatorname{div}\vec{a}\,(M_1) = \frac{1}{V}\iint\limits_{\Pi} \vec{a}_n\,d\sigma, \tag{1}$$

где $M_1\in\mathrm{T}$, а V — объем тела T. Устремляя диаметр d тела T к нулю (тогда $M_1\to M$) и используя непрерывность функции $\operatorname{div}\vec{a}\,(M_1)$ в точке M, заключаем, что существует предел, равный $\operatorname{div}\vec{a}\,(M)$:

$$\operatorname{div}\vec{a}\,(M) = \lim_{d\to 0}\frac{1}{V}\iint\limits_{\Pi} \vec{a}_n\,d\sigma. \tag{2}$$

Теперь можно дать инвариантное определение дивергенции, не связанное с выбором координатных осей и эквивалентное определению 2 § 8.3.

Определение 1. *Дивергенцией* векторного поля в точке M называется предел отношения потока поля через малую замкнутую поверхность, окружающую точку M, к объему тела, ограниченного этой поверхностью, при стремлении диаметра к нулю.

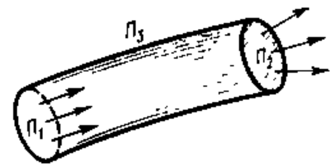


Рис. 137

2⁰. Соленоидальные поля. Предыдущие рассуждения показывают, что любое векторное поле $\vec{a}$ порождает скалярное поле дивергенции $\operatorname{div}\vec{a}$.

Векторное поле $\vec{a}(M)$ называется *соленоидальным* (или *трубчатым*) в области T, если его дивергенция равна нулю в каждой точке области, т. е. если $\operatorname{div}\vec{a}=0$. В силу формулы (5) § 8.2, если область $T\subset R^3$ поверхностно-односвязна *, то для соленоидального поля имеем

$$\iint_{\Pi} \vec{a}_n\, d\sigma = 0, \tag{3}$$

где П — любая замкнутая поверхность, внутри которой поле везде существует. Рассмотрим векторную трубку между двумя произвольными ее сечениями Π_1 и Π_2 (рис. 137). Поверхность трубки обозначим через Π_3. Согласно сказанному, имеем

$$\iint_{\Pi_1} \vec{a}_n\, d\sigma + \iint_{\Pi_2} \vec{a}_n\, d\sigma + \iint_{\Pi_3} \vec{a}_n\, d\sigma = 0, \tag{4}$$

причем во всех случаях берется внешняя нормаль. На поверхности Π_3 трубки $\vec{a}_n=\vec{0}$, так как $\vec{a}_n$ лежит в касательной плоскости к этой поверхности. Если для сечения Π_1 взять направление внутренней нормали, а для сечения Π_2 — внешней нормали, то придем к равенству $\iint_{\Pi_1} \vec{a}_n\, d\sigma = \iint_{\Pi_2} \vec{a}_n\, d\sigma$, т. е. поток соленоидального поля через поперечные сечения векторной трубки имеет одно и то же значение. Это значение называют *интенсивностью* (или *напряжением*) векторной трубки.

Физическая интерпретация соленоидального поля такова: в случае несжимаемой жидкости и при отсутствии источников ($\operatorname{div}\vec{a}=0$) расход жидкости через поперечное сечение векторной трубки имеет одно и то же значение для всех сечений этой трубки.

* Область T называется *поверхностно-односвязной*, если для любой замкнутой линии $\Lambda\subset T$, лежащей в этой области, имеется поверхность П, лежащая в той же области и имеющая Λ своим граничным контуром. В этом случае говорят, что на линию Λ можно натянуть поверхность, целиком содержащуюся в T. Шар и шаровое кольцо поверхностно-односвязны, а внутренность шара не является поверхностно-односвязной.

§ 8.4. Линейный интеграл в векторном поле. Работа силового поля. Циркуляция векторного поля. Формула Стокса. Ротор поля, его координатное и инвариантное определения. Физический смысл ротора в поле скоростей. Условия независимости линейного интеграла от пути интегрирования

1°. Линейный интеграл в векторном поле. Циркуляция. Пусть Λ — пространственная кусочно-гладкая направленная линия и $\vec{a}(M)$ — непрерывное векторное поле, заданное в $\Lambda\subset T\subset \mathbf{R}^3$. Обозначим проекции вектора $\vec{a}(M)$ на координатные оси через $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$.

Определение 1. Криволинейный интеграл вида

$$\int\limits_{\Lambda} P(x, y, z)\,dx+Q(x, y, z)\,dy+R(x, y, z)\,dz,$$

взятый по некоторой направленной линии Λ, называется *линейным интегралом* от вектора $\vec{a}$ вдоль линии Λ или, короче, интегралом от вектора $\vec{a}$ вдоль линии Λ.

Определение 2. Циркуляцией векторного поля $\vec{a}=(P, Q, R)$ по (вдоль) замкнутой линии Λ в области $T\subset\mathbf{R}^3$ называется линейный интеграл по этой замкнутой линии Λ, обозначаемый через $Ц$, и определяемый формулой

$$Ц=\int\limits_{\Lambda}\vec{a}\,d\vec{r}, \tag{1}$$

где $d\vec{r}=(dx, dy, dz)$ — вектор-дифференциал.

Если Λ — гладкая линия, то очевидно, что

$$\int\limits_{\Lambda}\vec{a}\,d\vec{r}=\int\limits_{\Lambda}\text{пр}_{\vec{\tau}}\vec{a}\,dl, \tag{2}$$

где $\vec{\tau}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ — единичный касательный вектор, dl — элемент дуги Λ, $\text{пр}_{\vec{\tau}}\vec{a}$ — проекция вектора $\vec{a}$ на касательную $\vec{\tau}$.

В том случае, когда $\vec{a}$ — силовое поле, линейный интеграл от вектора $\vec{a}$ равен работе сил поля при перемещении точки по линии Λ (*физический смысл линейного интеграла*).

2°. Формула Стокса. *Определение 3. Ротором* (или *вихрем*) векторного поля $\vec{a}(M)=P(M)\vec{i}+Q(M)\vec{j}+R(M)\vec{k}$ называется векторное поле точки M, обозначаемое $\operatorname{rot} a(M)$ и определяемое формулой

$$\operatorname{rot}\vec{a}(M)=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}, \tag{3}$$

где частные производные вычислены в точке M.

Пример 1. Найти ротор векторного поля $\vec{a}(x, y, z)=z^2\vec{i}+x^2\vec{j}+y^2\vec{k}$.

Решение. Находим проекции ротора: $\mathrm{rot}_x\vec{a}=\frac{\partial(y^2)}{\partial y}-\frac{\partial(x^2)}{\partial z}=2y$, $\mathrm{rot}_y\vec{a}=\frac{\partial(z^2)}{\partial z}-\frac{\partial(y^2)}{\partial x}=2z$, $\mathrm{rot}_z\vec{a}=\frac{\partial(x^2)}{\partial x}-\frac{\partial(z^2)}{\partial y}=2x$. Следовательно, $\mathrm{rot}\,\vec{a}=2y\vec{i}+2z\vec{j}+2x\vec{k}$.

Геометрический и физический смысл ротора будет установлен в дальнейшем (см. п. 3⁰).

При некоторых условиях имеет место *формула Стокса*

$$\iint_{\Pi}\vec{n}\,\mathrm{rot}\,\vec{a}\,\mathrm{d}\sigma=\int_{\Lambda}\vec{a}\,\mathrm{d}\vec{r}, \tag{4}$$

где $\vec{a}=(P, Q, R)$ и P, Q, R — непрерывно дифференцируемые функции на Π, т. е. *поток вектора* $\mathrm{rot}\,\vec{a}$ *через ориентированную поверхность* Π *равен циркуляции вектора* $\vec{a}$ *вдоль положительного направления обхода контура* Λ *этой поверхности.*

Докажем справедливость формулы Стокса для гладкой поверхности Π, однозначно проектирующейся на все координатные плоскости. Пусть $z=z(x, y)$ — уравнение поверхности Π, где функция $z(x, y)$ непрерывно дифференцируема на компактной фигуре Φ, являющейся проекцией Π на плоскость xOy. Обозначим через Λ и Λ_1 контуры, ограничивающие соответственно Π и Φ, причем Λ_1 есть проекция Λ на xOy. Выберем верхнюю сторону поверхности Π, а в соответствии с этим и ориентацию на ней (рис. 138).

Криволинейный интеграл по контуру Λ в правой части равенства (5) преобразуем сначала в криволинейный интеграл по контуру Λ_1, затем — в двойной интеграл по фигуре Φ и, наконец,—в поверхностный интеграл по поверхности Π. Рассмотрим сначала интеграл вида $\int_{\Lambda}P(x, y, z)\,\mathrm{d}x$. Так как $\Lambda\subset\Pi$, то координаты точек контура удовлетворяют уравнению $z=z(x, y)$ и, следовательно, значения функции $P(x, y, z)$ на Λ равны соответствующим значениям функции $P(x, y, z(x, y))$ на Λ_1. Проекции соответствующих разбиений контуров Λ и Λ_1 на ось Ox совпадают, а значит, совпадают и интегральные суммы для криволинейных интегралов второго рода по контурам Λ и Λ_1. Поэтому $\int_{\Lambda}P(x, y, z)\,\mathrm{d}x=\int_{\Lambda_1}P(x, y, z(x, y))\,\mathrm{d}x$.

Применяя к последнему интегралу формулу Грина, получим

$$\int_{\Lambda_1}P(x, y, z(x, y))\,\mathrm{d}x=-\iint_{\Phi}\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}z'_y\right)\mathrm{d}s. \tag{5}$$

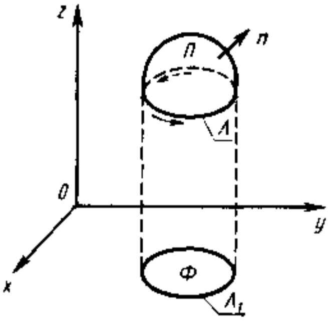


Рис. 138

В правой части равенства (5) подынтегральная функция есть производная по y сложной функции $P(x, y, z(x, y))$, где y входит как непосредственно, так и через $z(x, y)$.

Выражая ds через элемент $d\sigma$ поверхности по формуле $ds = \cos\gamma\, d\sigma$, приведем двойной интеграл к интегралу по поверхности П:

$$\int_{\Lambda} P\,dx = -\iint_{\Phi} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} z'_y\right) \cos\gamma\, d\sigma. \tag{6}$$

Как было отмечено выше, вектор $(p, q, -1)$, где $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, перпендикулярен поверхности $z = z(x, y)$ и, следовательно, коллинеарен единичному вектору нормали $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, т. е. $(\cos\alpha)/p = (\cos\beta)/q = (\cos\gamma)/(-1)$. Следовательно, $q\cos\gamma = -\cos\beta$, откуда окончательно находим

$$\int_{\Lambda} P\,dx = \iint_{П} \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right) d\sigma. \tag{7}$$

Если $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ — две другие функции, заданные на П, то аналогично получаются формулы

$$\int_{\Lambda} Q\,dy = \iint_{П} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right) d\sigma, \tag{8}$$

$$\int_{\Lambda} R\,dz = \iint_{П} \left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right) d\sigma. \tag{9}$$

Складывая формулы (7)—(9), приходим к формуле Стокса:

$$\int_{\Lambda} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_{П} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] d\sigma. \tag{10}$$

Формулу (10) можно переписать в виде

$$\int_{\Lambda} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_{П} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz +$$

$$+ \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy. \tag{11}$$

Определение стороны поверхности П и направления $\vec{n}$ производится по следующему правилу: если смотреть с конца нормали, то обход вдоль кривой Λ должен быть виден происходящим против часовой стрелки.

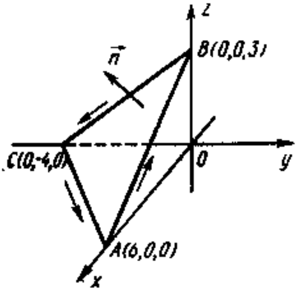


Рис. 139

Комментарий к формуле Стокса. Формула Грина есть частный случай формулы Стокса, когда П — фигура на плоскости xOy. При этом Λ — замкнутая линия на плоскости xOy и $dz=0$, а направление $\vec{n}$ совпадает с направлением Oz, так что $\cos\alpha=\cos\beta=0$ и $\cos\gamma=1$.

Пример 2. Вычислить циркуляцию $Ц$ векторного поля $\vec{a}(x, y, z)=xy\vec{i}+yz\vec{j}+xz\vec{k}$ вдоль линии пересечения плоскости $2x-3y+4z-12=0$ с координатными плоскостями.

Решение. Рассмотрим верхнюю сторону плоскости П, а также соответствующее этой стороне положительное направление обхода замкнутой линии $ABCA$ (рис. 139). Имеем: $P=xy$, $Q=yz$, $R=xz$, $R'_y=0$, $Q'_z=y$, $P'_z=0$, $R'_x=z$, $Q'_x=0$, $P'_y=x$. Подставляя эти выражения в формулу Стокса (11), получим

$$Ц=\int_{\Lambda} xy\,dx+yz\,dy+xz\,dz=-\iint_{\Pi} y\,dy\,dz+z\,dz\,dx+x\,dy\,dx.$$

Выразим интеграл по поверхности П через двойные интегралы по фигурам, являющимися проекциями П на координатные плоскости:

$$Ц=-\iint_{\triangle BCO} y\,dy\,dz-\iint_{\triangle BAO} -z\,dz\,dx-\iint_{\triangle AOC} x\,dx\,dy,$$

где $\triangle BCO$, $\triangle BAO$, $\triangle AOC$ — проекции заданной плоскости соответственно на координатные плоскости yOz, zOx, xOy. Находим

$$-\iint_{\triangle BCO} y\,dy\,dz=8,\quad -\iint_{\triangle BAO} z\,dz\,dx=-9,\quad -\iint_{\triangle AOC} x\,dx\,dy=-24$$

(проверьте). Значит, $Ц=8+9-24=-7$.

3°. Инвариантное определение ротора поля. Физический смысл ротора в поле скоростей. Данное выше определение ротора зависит от выбора координатной системы. Дадим теперь инвариантное определение ротора поля. Пусть $\vec{n}$ — произвольный фиксированный единичный вектор и Φ — плоская фигура с границей Λ, содержащая точку M и перпендикулярная вектору $\vec{n}$ (рис. 140). Запишем формулу Стокса:

$$\int_{\Lambda} \vec{a}\,d\vec{r}=\iint_{\Phi} \operatorname{rot}_n\vec{a}\,d\sigma.$$

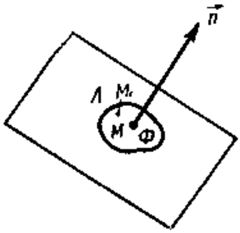


Рис. 140

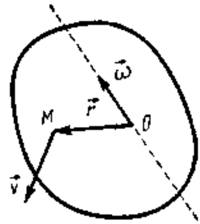


Рис. 141

В силу теоремы о среднем значении имеем

$$\int\limits_{\Lambda} \vec{a}\,d\vec{r} = \iint\limits_{\Phi} \operatorname{rot}_n \vec{a}\,d\sigma = S \cdot \operatorname{rot}_n \vec{a}\,(M_1),$$

или

$$\operatorname{rot}_n \vec{a}\,(M_1) = \frac{1}{S} \int\limits_{\Lambda} \vec{a}\,d\vec{r}, \tag{12}$$

где $M_1 \in \Phi$, а S — площадь фигуры Φ. Устремляя диаметр d фигуры Φ к нулю (тогда $M_1 \to M$) и используя непрерывность функции $\operatorname{rot} \vec{a}\,(M_1)$ в точке M, найдем проекцию вектора $\operatorname{rot} \vec{a}\,(M)$ на направление $\vec{n}$:

$$\operatorname{rot}_n \vec{a}\,(M) = \lim_{d \to 0} \frac{1}{S} \int\limits_{\Lambda} \vec{a}\,d\vec{r}. \tag{13}$$

Правая часть равенства (13) не зависит от выбранной системы координат. Следовательно, то же самое справедливо и для проекции вектора $\operatorname{rot} \vec{a}\,(M)$ на произвольное направление $\vec{n}$. Тогда и сам вектор $\operatorname{rot} \vec{a}$ не зависит от выбранной системы координат, поскольку для определения вектора достаточно знать его проекции на три взаимно перпендикулярных направления. Таким образом, вектор $\operatorname{rot} \vec{a}$ — инвариантная характеристика векторного поля $\vec{a}\,(M)$.

Дадим физическое истолкование понятия ротора векторного поля. Рассмотрим движение твердого тела вокруг неподвижной точки (рис. 141). В кинематике доказывается, что поле скорости $\vec{v}$ для любого момента времени определяется формулой $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, где $\vec{\omega}$ — мгновенная угловая скорость, а $\vec{r}$ — радиус-вектор произвольной точки M тела. Найдем проекции вектора $\vec{v}$ на оси координат: $\omega_y z - \omega_z y$, $\omega_z x - \omega_x z$, $\omega_x y - \omega_y x$. Так как проекции вектора $\operatorname{rot} \vec{v}$ на оси координат в силу формулы (3) соответственно равны

$2\omega_x$, $2\omega_y$, $2\omega_z$, то $\vec{\omega}=\frac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{v}$. Следовательно, с точностью до числового множителя *ротор поля скорости $\vec{v}$ представляет собой мгновенную угловую скорость вращения твердого тела.*

4⁰. Необходимые и достаточные условия независимости линейного интеграла от его пути интегрирования. Пусть в пространственной поверхностно-односвязной (см. сноску на с. 299) области T определены непрерывно дифференцируемые функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$. Рассмотрим линейный интеграл

$$\int\limits_{\Lambda} P\,dx+Q\,dy+R\,dz, \tag{14}$$

взятый по некоторой линии $\Lambda\in T$.

Формула Стокса позволяет установить необходимые и достаточные условия обращения в нуль интеграла (14) в предположении, что линия Λ является простой (т. е. не пересекающей себя) и замкнутой. В самом деле, натянем на контур Λ поверхность Π и заменим по формуле Стокса криволинейный интеграл (14) поверхностным интегралом

$$\iint\limits_{\Pi}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\,dx. \tag{15}$$

Для обращения интеграла (15) в нуль достаточно выполнение следующих тождеств:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}\quad \underline{\forall}\,(x, y, z)\in T. \tag{16}$$

Выполнение этих же тождеств является и необходимым условием для обращения в нуль интеграла (15). В этом можно убедиться, если рассматривать плоские фигуры Φ, лежащие в плоскостях, параллельных той или иной координатной плоскости.

Покажем, что те же условия (16) необходимы и достаточны для того, чтобы интеграл (14) не зависел от пути интегрирования в поверхностно-односвязной области T, а зависел лишь от начальной и конечной точки пути.

Необходимость. Пусть интеграл (14) не зависит от пути интегрирования. Возьмем в T произвольную замкнутую линию Λ и разобьем ее на части ACB и ADB какими-нибудь точками A и B. Так как согласно условию интегралы по этим частям должны быть равны, т. е.

$$\int\limits_{ACB} P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\int\limits_{ADB} P\,dx+Q\,dy+R\,dz, \tag{17}$$

то $\int\limits_{\Lambda}=\int\limits_{ACB}+\int\limits_{BDA}=\int\limits_{ACB}-\int\limits_{ADB}=0$ (подынтегральная функция для краткости опущена).

Достаточность. Пусть выполнены условия (16). Тогда интеграл (15) обращается в нуль вдоль простой замкнутой линии Λ и, значит,

$$\int\limits_{ACB} P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\int\limits_{ADB} P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

при условии, что линии ACB и ADB не имеют общих точек, кроме A и B. Если же это не так и выбранные линии пересекаются, то в силу поверхностной односвязности области T всегда можно выбрать третью линию AEB, которая не пересекается ни с одной из прежних. Тогда $\int\limits_{ACB}=\int\limits_{AEB}$, $\int\limits_{ADB}=\int\limits_{AEB}$, откуда и следует независимость интеграла (14) от пути интегрирования.

5°. Упражнения

С помощью формулы Стокса вычислите криволинейные интегралы и сравните результаты с непосредственным вычислением интегралов:

1. $\int\limits_{\Lambda} (y+z)\,dx+(z+x)\,dy+(x+y)\,dz$, где Λ — окружность $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$.

2. $\int\limits_{\Lambda} x^2y^3\,dx+dy+z\,dz$, где Λ — окружность $x^2+y^2=R^2$, $z=0$.

3. Найдите циркуляцию некоторого поля $\vec{a}=-y\vec{i}+x\vec{j}+5\vec{k}$ вдоль окружности: а) $x^2+y^2=1$, $z=0$; б) $(x-2)^2+y^2=1$, $z=0$.

4. Найдите циркуляцию векторного поля $\vec{a}=\operatorname{grad}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\right)$ вдоль линии Λ, если: а) Λ не окружает ось Oz; б) Λ окружает ось Oz.

5. Плоский установившийся поток жидкости характеризуется вектором скорости $\vec{w}=P(x,\ y)\vec{i}+Q(x,\ y)\vec{j}$. Определите: а) количество жидкости, протекающее через замкнутый контур Λ, ограничивающий область Φ (расход жидкости); б) циркуляцию вектора скорости вдоль контура Λ.

§ 8.5. Потенциальное поле. Условие потенциальности поля. Вычисление линейного интеграла в потенциальном поле

1°. Потенциальное поле. Условие потенциальности поля. *Определение 1.* Векторное поле $\vec{a}(M)=P(M)\vec{i}+Q(M)\vec{j}+R(M)\vec{k}$ называется *потенциальным* (или *градиентным*, или *безвихревым*) в области $T\subset\mathbf{R}^3$, если его ротор равен нулю в каждой точке этой области.

Согласно определению потенциального поля,

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}=0, \qquad (1)$$

для каждой точки поля, т. е. справедливы следующие тождества:

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}. \qquad (2)$$

Поэтому выполнение тождеств (2) является условием потенциальности векторного поля. Эти тождества необходимы и достаточны для обращения в нуль интеграла (14) § 8.4 вдоль замкнутой линии Λ, а также для его независимости от пути интегрирования.

Определение 2. Скалярное поле $U(x, y, z)$, градиент которого порождает потенциальное поле $\vec{a}(x, y, z)$, называется *потенциальной функцией* (или *потенциалом*) этого векторного поля *.

Таким образом, потенциальное поле характеризуется соотношением

$$\vec{a}(x, y, z)=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}=U'_x\vec{i}+U'_y\vec{j}+U'_z\vec{k}=\operatorname{grad} U. \qquad (3)$$

Для поверхностно-односвязной пространственной области T потенциальность поля, существование потенциальной функции и условие, что ротор поля во всех точках равен нулю, эквивалентны.

2⁰. Вычисление линейного интеграла в потенциальном поле. Если область T является поверхностно-односвязной, то линейный интеграл в потенциальном поле не зависит от пути интегрирования, а зависит только от координат начальной и конечной точек A и B этого пути и равен приращению потенциальной функции $U(x, y, z)$ в этих точках:

$$\int_{AB} P\,dx+Q\,dy+R\,dz=U(x_B, y_B, z_B)-U(x_A, y_A, z_A). \qquad (4)$$

Здесь AB — произвольный путь интегрирования от точки $A(x_A, y_A, z_A)$ до точки $B(x_B, y_B, z_B)$. Обычно в качестве такого пути берется ломаная $ACDB$, звенья которой AC, CD и DB параллельны осям координат. В этом случае формула для вычисления потенциала имеет вид

$$U(x, y, z)=\int_A^B P\,dx+Q\,dy+R\,dz=$$

$$=\int_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)\,dy+\int_{z_0}^{z} R(x, y, z)\,dz, \qquad (5)$$

где $\overrightarrow{AC}=(x-x_0, 0, 0)$, $\overrightarrow{CD}(0; y-y_0, 0)$, $\overrightarrow{DB}(0, 0, z-z_0)$.

Если потенциальное поле является силовым, то работа при перемещении точки в таком поле не зависит от пути перемещения из одной точки $A(x_A, y_A, z_A)$ поля в другую $B(x_B, y_B, z_B)$ и может быть вычислена по формуле (4).

В потенциальном векторном поле циркуляция вдоль всякой замкнутой кривой Λ, лежащей в поверхностно-односвязной области, равна нулю.

---

* В физике потенциалом обычно называют функцию $-U(x, y, z)$, а функцию $U(x, y, z)$ называют *силовой* функцией, если речь идет о поле сил.

Для силового потенциального поля это означает, что работа сил поля вдоль всякой замкнутой кривой Λ в этом поле равна нулю.

Пример. Показать, что поле $\vec{a}=(x^2-2yz)\vec{i}+(y^2-2xz)\vec{j}+(z^2-2xy)\vec{k}$ является потенциальным. Найти его потенциал.

Решение. Так как $P=x^2-2yz$, $Q=y^2-2xz$, $R=z^2-2xy$, то $\operatorname{rot}\vec{a}=(-2x+2x)\vec{i}-(-2y-2y)\vec{j}+(-2z+2z)\vec{k}=\vec{0}$. Следовательно, данное поле является потенциальным. Потенциал поля находим по формуле (5):

$$U(x, y, z)=\int_{x_0}^{x}(x^2-2y_0z_0)\,dx+\int_{y_0}^{y}(y^2-2xz_0)\,dy+\int_{z_0}^{z}(z^2-2xy)\,dz=$$

$$=\frac{1}{3}x^3-2xy_0z_0\Big|_{x_0}^{x}+\frac{1}{3}y^3-2xyz_0\Big|_{y_0}^{y}+\frac{1}{3}z^3-2xyz\Big|_{z_0}^{z}=$$

$$=\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xy+C_0,$$

где $C_0=-\frac{1}{3}x_0^3-\frac{1}{3}y_0^3-\frac{1}{3}z_0^3+2x_0y_0z_0$.

3⁰. Упражнения

1. Покажите, что векторное поле $\vec{a}=yz(2x+y+z)\vec{i}+xz(x+2y+z)\vec{j}+xy(x+y+2z)\vec{k}$ — потенциальное и найдите его потенциал.

2. Покажите, что векторное поле $\vec{a}=(x^2+3yz)\vec{i}+(2y^2+3xz)\vec{j}+(z^2+3xy)\vec{k}$ — потенциальное и найдите его потенциал.

3. Найдите потенциал гравитационного поля $\vec{a}=-\frac{m}{r^3}\vec{r}$, создаваемого массой m, помещенной в начале координат.

§ 8.6. Оператор Гамильтона. Операции второго порядка в векторном анализе. Оператор Лапласа, его выражение в декартовых, цилиндрических и сферических координатах

1⁰. Оператор Гамильтона. Градиент функции $u(x, y, z)$ часто обозначают буквой ∇ («набла») и записывают следующим образом:

$$\nabla u=\vec{i}\frac{\partial u}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial u}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial u}{\partial z}. \tag{1}$$

Равенство (1) можно символически записать в виде

$$\nabla u=\left(\vec{i}\frac{\partial u}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial u}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial u}{\partial z}\right)u. \tag{2}$$

Определение 1. Символ

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{3}$$

называется *символическим вектором* (или *оператором Гамильтона*, или *набла-оператором*). Из формул (1) и (2) следует, что градиент функции есть «произведение» символического вектора ∇ на скалярную функцию u, т. е. $\nabla u = \operatorname{grad} u$.

Составим скалярное и векторное произведения символического вектора ∇ на вектор $\vec{a} = \vec{i}P + \vec{j}Q + \vec{k}R$. В первом случае получим

$$\nabla\vec{a} = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(\vec{i}P + \vec{j}Q + \vec{k}R) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}P + \frac{\partial}{\partial y}Q + \frac{\partial}{\partial z}R = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div}\vec{a}.$$

Следовательно,

$$\nabla\vec{a} = \operatorname{div}\vec{a}, \tag{4}$$

т. е. дивергенция вектора $\vec{a}$ равна скалярному произведению символического вектора ∇ на вектор $\vec{a}$.

Во втором случае имеем

$$\nabla \times \vec{a} = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (\vec{i}P + \vec{j}Q + \vec{k}R) =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Следовательно,

$$\nabla \times \vec{a} = \operatorname{rot}\vec{a}, \tag{5}$$

т. е. ротор вектора $\vec{a}$ равен векторному произведению символического вектора ∇ на вектор $\vec{a}$.

2°. Операции второго порядка. Оператор Лапласа. Пусть в области $T \subset \mathbb{R}^3$ заданы скалярное поле $u(M)$ и векторное поле $\vec{a}(M)$. Операции $\operatorname{grad} u$, $\operatorname{div}\vec{a}$, $\operatorname{rot}\vec{a}$ называются *операциями первого порядка*. Первая и третья операции порождают векторное поле, а вторая — скалярное поле.

Возможны следующие операции: $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u$, $\operatorname{div}\operatorname{grad} u$, $\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a}$, $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a}$, $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a}$, которые называются *операциями второго порядка*. При этом справедливы соотношения

$$\text{rot grad}\, u = 0, \quad \text{div rot}\, \vec{a} = 0. \tag{6}$$

В самом деле, на основании формул (2) § 8.1 и (3) § 8.4 получим

$$\text{rot grad}\, u =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right)\vec{k} = 0.$$

В справедливости второго из соотношений (6) рекомендуем убедиться самостоятельно.

Определение 2. Операция второго порядка $\text{div grad}\, u$ называется *оператором Лапласа* и обозначается через Δ (не путать с обозначением приращения), т. е. $\Delta u = \text{div grad}\, u$.

Легко проверить, что операции второго порядка $\text{grad div}\, \vec{a}$ и $\text{rot rot}\, \vec{a}$ удовлетворяют соотношению

$$\text{rot rot}\, \vec{a} = \text{grad div}\, \vec{a} - \Delta \vec{a}, \tag{7}$$

где $\Delta \vec{a} = \Delta P \vec{i} + \Delta Q \vec{j} + \Delta R \vec{k}$.

3⁰. Выражение оператора Лапласа в декартовых, цилиндрических и сферических координатах. Найдем выражение оператора Лапласа в декартовых координатах. Имеем

$$\text{div grad}\, u = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Итак,

$$\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz}. \tag{8}$$

Используя формулу (8), можно найти выражения оператора Лапласа в цилиндрических координатах $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$ и в сферических координатах $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $r = r\cos\theta$.

Приведем окончательные формулы для этих выражений:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{9}$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\text{ctg}\,\varphi}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}. \tag{10}$$

4⁰. Упражнения

Докажите справедливость следующих формул, связывающих между собой операции взятия градиента, дивергенции и ротора с алгебраическими операциями:

1. $\operatorname{grad}(u+v)=\operatorname{grad}u+\operatorname{grad}v$.

2. $\operatorname{grad}(uv)=u\operatorname{grad}v+v\operatorname{grad}u$.

3. $\operatorname{grad}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\operatorname{grad}u-u\operatorname{grad}v}{v^2}$, $\quad v\neq 0$.

4. $\operatorname{div}(\vec{a}+\vec{b})=\operatorname{div}\vec{a}+\operatorname{div}\vec{b}$.

5. $\operatorname{div}(u\vec{a})=\vec{a}\operatorname{grad}u+u\operatorname{div}\vec{a}$.

6. $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}\operatorname{rot}\vec{a}-\vec{a}\operatorname{rot}\vec{b}$.

7. $\operatorname{rot}(\vec{a}\pm\vec{b})=\operatorname{rot}\vec{a}\pm\operatorname{rot}\vec{b}$.

8. $\operatorname{rot}(u\vec{a})=u\operatorname{rot}\vec{a}-\vec{a}\times\operatorname{grad}u$.

ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ

Глава I

§ 1.1. **1.** б) $\int (2x+4)\,dx = x^2+4x+C$; в) $y=x^2+4x+3$, $y=x^2+4x+5$; г) $C_0=4$, $y=x^2+4x+4$. **2.** б) $\int e^{2x}\,dx = 0{,}5e^{2x}+C$; в) $y=0{,}5e^{2x}-1$, $y=0{,}5e^{2x}+1$; г) $C_0=-0{,}5$, $y=0{,}5e^{2x}-0{,}5$. **3.** б) $\int \cos x\,dx=\sin x+C$; в) $y=\sin x-1$, $y=\sin x+1$; г) $C_0=0$, $y=\sin x$.

§ 1.2. **1.** $-5\cos\frac{x}{5}+C$. **2.** $-\frac{1}{12}(1-3x^3)^{4/3}+C$. **3.** $\frac{1}{3}\ln^3 x+C$. **4.** $-\frac{1}{3}e^{-x^3}+C$. **5.** $-\frac{1}{2}\ln|1+2\cos x|+C$. **6.** $\ln|\sin x|+C$. **7.** $x+\cos x+C$. **8.** $e^x+\operatorname{tg} x+C$. **9.** $-x-\operatorname{ctg} x+C$. **10.** $-\ln|\cos(\ln x)|+C$. **11.** $\frac{3}{2}\ln(x^2-4x+13)+\frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3}+C$. **12.** $-\sqrt{7+6x-x^2}+8\arcsin\frac{x-3}{4}+C$. **13.** $\frac{1}{3}\ln\frac{|x-7|^5}{(x-1)^2}+C$. **14.** $\ln|x+5+\sqrt{x^2+10x+24}|+C$. **15.** $\frac{1}{9}x^3(3\ln x-1)+C$. **16.** $x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$. **17.** $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$. **18.** $\ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{\operatorname{arctg} x}{x}+C$. **19.** $-e^{-x}(x^2+2x+2)+C$. **20.** $\frac{1}{26}e^x(\sin 5x-5\cos 5x)+C$. **21.** $\frac{1}{30}(3\sin 5x+5\sin 3x)+C$. **22.** $-\frac{1}{8}\cos 4x+C$ или $\frac{1}{4}\sin^2 2x+C_1$. **23.** $\frac{1}{12}(6x-\sin 6x)+C$. **24.** $\frac{3}{28}\sqrt[3]{\sin^2 x}\,(14-7\sin^2 x+2\sin^4 x)+C$. **25.** $\frac{1}{32}(4x-\sin 4x)+C$. **26.** $\frac{1}{96}(12x-3\sin 4x-4\sin^3 2x)+C$.

§ 1.3. 1. $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+4x+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C$. 2. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+4)^5}{(x+2)^3}\right|+C$.

3. $\frac{1}{x-1}+\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+C$. 4. $\frac{4x+3}{2(x+1)^2}+\ln\frac{x^2}{(x+1)^2}+C$. 5. $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{x^2+1}+C$.

6. $\frac{1}{6(x+1)}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{2\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$. 7. $\frac{1}{20}\ln\frac{x^2+1}{x^2-2x+5}+$ $+\frac{1}{5}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{20}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C$. 8. $-\frac{1}{x}+\frac{3}{4}\ln|x|-\frac{9}{13}\ln|x-1|-$ $-\frac{3}{104}\ln(x^2+4x+8)+\frac{15}{52}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2}+C$. 9. $-\frac{1}{2}\left[\frac{x+2}{x^2+2x+2}+\right.$ $\left.+\operatorname{arctg}(x+1)\right]+C$. 10. $\frac{13x-24}{3(x^2-3x+3)}+\frac{26\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{\sqrt{3}}+C$.

§ 1.4. 1. $e^x+2\ln|e^x-2|+C$. 2. $-x/2+(1/3)\ln|e^x-1|+(1/6)\ln(e^x+2)+C$.

3. $(1/3)\operatorname{tg}^3x-\operatorname{tg}x+x+C$. 4. $-\ln|\cos x-\sin x|+C$. 5. $\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x-1}{\sqrt{3}}+C$.

6. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{2}\right)+C$. 7. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}\right|+C$. 8. $\operatorname{arctg}\left(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C$.

9. $(3/2)\ln\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)+C$. 10. $4\sqrt[4]{x}+2\ln(1+\sqrt{x})-4\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}+C$.

11. $4\sqrt[4]{x}-6\sqrt[6]{x}+12\sqrt[12]{x}+2\ln|x|-36\ln\left(1+\sqrt[12]{x}\right)+C$. 12. $2\sqrt{x+9}+$ $+3\ln\left|\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+9}+3}\right|+C$. 13. $\frac{4x+15}{96}\sqrt{4x-3}-\frac{9}{32\sqrt{4x-3}}+C$.

14. $-\frac{2}{5}\sqrt{\frac{x+5}{x}}+C$. 15. $\frac{2-x}{2}\sqrt{1-x^2}-\frac{3}{2}\arcsin x+C$.

16. $\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\frac{x-1}{3+3x+2\sqrt{3(x^2+x+1)}}\right|+C$. 17. $-2\sqrt{\frac{2-x}{x-1}}+C$.

18. $\frac{2x^2-1}{3x^3}\sqrt{x^2+1}+C$.

Глава II

§ 2.1. 1. e^a-1. 2. $a^2/2$. 3. 20. 4. $\pi/6$. 5. 0,5. 6. $\pi/4$. 7. $\ln 2$. 8. 1. 9. $0{,}5\ln|2a-1|$. 10. $\pi/4$. 11. 1/6. 12. $-a^3/6$.

§ 2.3. 1. 1. 2. $(\sqrt{3}-1)/2$. 3. $\ln(9/4)-1/3$. 4. $\operatorname{arctg}e-\pi/4$. 5. 17/6. 6. $(\pi-2)/4$ (примените подстановку $\sqrt{2}\sin t=x$). 7. 1. 8. $(1-\ln 2)/2$. 9. $(\pi-2)/4$. 10. $(2/\sqrt{5})\operatorname{arctg}(1/\sqrt{5})$ (примените подстановку $\operatorname{tg}(x/2)=t$). 11. 1. 12. $\pi^4/16-3\pi^2+24$. 13. 848/105. 14. $(e^\pi-2)/5$. 15. $S_3=0{,}7850$, $I=\pi/4=0{,}7854$. 16. 0,74682. 17. Да, так как $n\geqslant 8{,}17$.

§ 2.4. 1. 32/3. 2. $8\ln 2$. 3. 8/3. 4. 125/6. 5. $3\pi a^2$. 6. $\pi a^2/2$. 7. $\pi a^2/4$. 8. $7a^2/(4\pi)$. 9. $11\pi a^2/8$. 10. $\ln 3$. 11. $6a$. 12. Точки пересечения с осью Ox: $t_1=0$, $t_2=\sqrt[4]{8}$; $L=13/3$. 13. $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+0{,}5a\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$. 14. $3\pi a/2$. 15. 12π. 16. $512\pi/15$. 17. $\pi^2/2$. 18. $\pi a^3/6$. 19. $2\pi\,[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$. 20. $(34\sqrt{17}-2)\pi/9$. 21. $62\pi/3$.

§ 2.6. 1. 1. 2. 1/2. 3. $\pi/6$. 4. $(\pi-2)/8$. 5. 1. 6. Расходится. 7. Расходится. 8. 1/2. 9. Сходится, так как $\frac{e^{-x}}{x}<e^{-x}$ при $x\geqslant 1$. 10. Расходится, так как $\frac{x}{\sqrt{x^4+1}}>\frac{x}{\sqrt{x^4+x^4}}$ при $x\geqslant 2$. 11. $6\sqrt[3]{2}$. 12. 6. 13. Расходится. 14. Расходится. 15. $-0{,}25$. 16. π. 17. Расходится. 18. Сходится. 19. Сходится.

Глава III

§ 3.1. 1. $y=-\cos x+C$. 2. $y=-\ln\cos x+C$. 3. $y=\sin x+C$. 4. $y=\operatorname{tg}(\arcsin x)+C$. 5. $y=\sin x+10$. 6. $y=\ln\sin x-1$. 7. $y=\arcsin x+93$.

§ 3.3. 1. $y=Cx$. 2. $y=Ce^{1/x}$. 3. $x+y=\ln[C(x+1)(y+1)]$. 4. $x=Ce^{1/y}+a$. 5. $y^2=Cxe^{-y/x}$. 6. $y\sqrt{a^2+x^2}=\ln[C(x+\sqrt{a^2+x^2})]$. 7. $y=\frac{x-1}{3}+\frac{C}{\sqrt{2x+1}}$. 8. $y\cos x=\cos x+\ln\left(C\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$. 9. $y^2(1+Ce^{x^2})=1$. 10. $y=2(\sin x-1)+Ce^{-\sin x}$. 11. $y=e^{\sqrt{x}-2}$. 12. $y=2\sin^2 x-0{,}5$. 13. $y=2x/(1-3x^2)$. 14. $y^3=x-2e^{1-x}$. 15. $x^3+2xy-3y=C$. 16. $x^2\cos 2y+2x=C$. 17. $\mu=e^{-y}$, $e^{-y}\cos x=C+x$. 18. $\mu=1/x$; $x\sin y+y\ln x=C$.

§ 3.4.

	k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.	x_k	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
	y_k	0	0,10	0,20	0,31	0,43	0,56	0,70	0,86	1,04	1,25	1,50

	k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2.	x_k	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
	y_k	1	0,990	0,962	0,917	0,862	0,800	0,735	0,671	0,610	0,552	0,500

§ 3.5. 1. $y=C_1\sin x-x-0{,}5\sin 2x+C_2$. 2. $y=C_2+C_1x(\ln x-1)$. 3. $y=(C_1x+C_2)^2$. 4. $y=C_2-C_1\cos x-x$. 5. $s=-t^2/4+C_1\ln t+C_2$. 6. $y=3\ln x+2x^2-6x+6$. 7. $y=C_1x+x\operatorname{arctg}x-\ln\sqrt{1+x^2}+C_2$. 8. $y=-\ln\cos x$. 9. $\operatorname{ctg}y=C_2-C_1x$. 10. $4(C_1y-1)=(C_1x+C_2)^2$.

§ 3.6. 1. $y=C_1x+C_2x\int x^{-2}e^x dx$. 2. $y=C_1\sin x+C_2\left[1+\frac{\sin x}{2}\ln\left|\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right|\right]$. 3. $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}$. 4. $y=(C_1x+C_2)e^{-ax}$. 5. $y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$. 6. $x=C_1e^{3t}+C_2e^{-t}$. 7. $s=e^{-t}(\cos t+2\sin t)$. 8. $y=C_1e^{-x}+(C_2x+C_3)e^{2x}$. 9. $y=(C_1+C_2x)\cos 2x+(C_3+C_4x)\sin 2x$.

§ 3.8. 1. $y=e^{2x}(C_1\sin 3x+C_2\cos 3x)+x^2+x-1$. 2. $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+5$. 3. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}-2x^3-3x$. 4. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}-\frac{\sqrt{2}}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$. 5. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x+e^x$. 6. $y=C_1e^{2x}+(C_2-x)e^x$. 7. $y=0{,}5e^{-x}+xe^{-2x}+C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}$. 8. $s=e^{-t}(C_1\cos t+C_2\sin t)+(t-1)^3$. 9. $y=3e^{x/2}-e^{-x/2}-x^3$. 10. $y=e^x-2e^{-2x}-3(x^2+x+1{,}5)$. 11. $y=e^{-2x}\left(C_1+C_2x-\frac{3x^2}{4}+\frac{x^2\ln x}{2}\right)$. 12. $y=C_1\sin x+C_2\cos x+\frac{1}{2\cos x}$. 13. $y=e^x\left(C_1+C_2x+\sqrt{4-x^2}+x\arcsin\frac{x}{2}\right)$.

Глава IV

§ 4.1. 1. $y_1=3C_1\cos 3x-3C_2\sin 3x$, $y_2=C_2\cos 3x+C_1\sin 3x$. 2. $y_1=C_1e^x-C_2e^{-x}+x-1$, $y_2=C_1e^x+C_2e^{-x}-x+1$. 3. $y_1=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}$, $y_2=C_1e^{-x}+3C_2e^{-3x}+\cos x$. 4. $y_1=C_1+C_2e^{-2x}+e^x$, $y_2=C_1-C_2e^{-2x}+e^x$. 5. $y_1=-2e^{-x}+3e^{-7x}$, $y_2=e^{-x}+3e^{-7x}$. 6. $y_1=e^{-x}(\sin x-2\cos x)$, $y_2=e^{-x}\cos x$.

§ 4.2. 1. Да. 2. а) Нет; б) да. 3. $y_1=C_1e^{-4x}+C_2e^{-7x}$, $y_2=0{,}5C_1e^{-4x}-C_2e^{-7x}$. 4. $x=e^t(K_1\cos 3t+K_2\sin 3t)$, $y=e^t(K_1\sin 3t-K_2\cos 3t)$. 5. $y_1=C_1e^x+C_2e^{2x}+C_3e^{-x}$, $y_2=C_1e^x-3C_3e^{-x}$, $y_3=C_1e^x+C_2e^{2x}-5C_3e^{-x}$. 6. $x=C_1+3C_2e^{2t}$, $y=-2C_2e^{2t}+C_3e^{-t}$, $z=C_1+C_2e^{2t}-2C_3e^{-t}$. 7. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$, $z=-2C_1e^{2x}+2C_2e^{-2x}$. 8. $x=(C_1-C_2)\cos t+(C_1+C_2)\sin t$, $y=C_1\sin t-C_2\cos t+C_3e^t$, $z=C_1\cos t+C_2\sin t+C_3e^t$. 9. $x=e^t(3\cos 3t+2\sin 3t)$, $y=e^t(3\sin 3t-2\cos 3t)$. 10. $y_1=\cos x-\sin x$, $y_2=\cos x$. 11. $y_1=\frac{1}{6}(2e^{-x}+e^{2x}+3e^{-2x})$, $y_2=\frac{1}{6}(2e^{-x}+e^{2x}-3e^{-2x})$, $y_3=\frac{1}{3}(e^{2x}-e^{-x})$.

§ 4.4. 1. $x(t)=C_1e^t+C_2e^{-t}+t\,\mathrm{sh}\,t$, $y(t)=C_1e^t-C_2e^{-t}+\mathrm{sh}\,t+t\,\mathrm{ch}\,t$. 2. $y_1=C_1e^x-C_2e^{-x}+x-1$, $y_2=C_1e^x+C_2e^{-x}-x+1$. 3. $x=C_1+C_2e^{-2t}+e^t$, $y=C_1-C_2e^{-2t}+e^t$.

Глава V

§ 5.1. 1. Неустойчива. 2. Устойчива. 3. Неустойчива. 4. Неустойчива.

Глава VI

§ 6.1. 1. ≈ 640. 2. ≈ 640. 3. ≈ 288. 4. $\approx 518{,}4$.

§ 6.2. 1. 4864/3. 2. 2048/3. 3. $(176\sqrt{2}+409)/3$. 4. $-93/120$. 8. 1/24. 9. $-7(15\pi+16)/480$. 10. 1/8. 11. 0. 12. $-5/72$.

§ 6.3. 1. $\pi(1-e^{-a^2})$. 2. 6π. 3. $a^3/3$. 4. $2a^3/3$. 5. $15\pi a^4/2$. 6. $\pi/2$. 7. $\pi h^4/4$. 8. $8a^2/9$. 9. $4\pi R^5/15$. 10. $\pi R^4/8$. 11. $4\pi R^5/15$.

§ 6.4. 1. $(5\sqrt{5}-2\sqrt{2})/3$. 2. $(3;0)$. 3. $\pi\delta r^4/2$. 4. $\pi MR^4/2$. 5. $(0;\ 0;\ 5R/4)$.

Глава VII

§ 7.1. 1. $2\sqrt{2}\pi\ (4\pi^2+3)/3$. 2. $-14\sqrt{2}/3$. 3. $(5\sqrt{5}-1)/3$. 4. $\pi a^3/4$. 5. $\frac{4ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$. 6. 4/3. 7. 0. 8. $-101/12$. 9. 388/3. 10. 26/3.

§ 7.2. 1. $a^2\sqrt{3}/2$. 2. $\pi^2/2$. 3. 2π. 4. $\pi\sqrt{2}/2$. 5. 3π. 6. -6. 7. $-0{,}8\pi R^{5/2}$. 8. $-4/3$. 9. $\pi/3$. 10. $-5\pi/24$.

Глава VIII

§ 8.1. 1. а) $y=\pm\sqrt{x^2-C}$; б) $y=Cx^2/2$; в) $z=\pm\sqrt{2x-y^2-C}$; г) $z=\pm\sqrt{C-x^2-3y^2}$. 2. $5+11\sqrt{3}/2$. 3. 9,4. 5. $\frac{1}{\sqrt{74}}(\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k})$. 6. $-\frac{\lambda}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$. 7. $\varphi=\arccos(-4/405)$. 8. а) $x=C_1y^{1/2}$, $y=C_2z^{2/3}$; б) $x=\ln(C_1y)^{y/2}$, $y=C_2z^{2/3}$; в) $x=z[\ln^2(C_1z)^{2/C_1}+C_2]$, $y=\ln(C_1z)^{z/2}$.

§ 8.2. 1. а) 0; б) πh^3. 2. а) $2h^2a^2$; б) $-a^4/2$. 3. $3\pi/8$. 4. $4\pi abc$. 5. $a^2b(4a+3\pi b)/3$. 6. $6\pi a^2h$.

§ 8.4. 1. 0. 2. $-R^6/8$ 3. а) 2π; б) 2π. 4. а) 0; б) $2\pi n$, где n — число оборотов контура Λ вокруг оси Oz. 5. а) $\iint\limits_{\Phi}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dx\,dy$; б) $\iint\limits_{\Phi}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$.

§ 8.5. 1. $U=xyz(x+y+z)+C$. 2. $U=\frac{1}{3}(x^3+2y^3+z^3)+3xyz+C$. 3. $U=m/r$.

Литература

1. Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление.— М.: Наука, 1980, 1984.

2. Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. — М.: Наука, 1981, 1985.

3. Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика. Задачник.— М.: Наука, 1982, 1987.

4. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах.— М.: Высшая школа, 1980, 1986, ч. I, II.

5. Еругин Н. П. Книга для чтения по дифференциальным уравнениям. — Минск: Вышэйшая школа, 1979.

6. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике. — М.: Наука, 1978, 1987.

7. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов/Под ред. Б. П. Демидовича.— М.: Наука, 1964—1978.

8. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа/Под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича.— М.: Наука, 1981.

9. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа/Под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. — М.: Наука, 1981.

10. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов.— М.: Наука, 1970—1985, т. 1, 2.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

А. Теп[illegible]ов, [illegible]шева, Д[illegible]. Попо[illegible]

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ